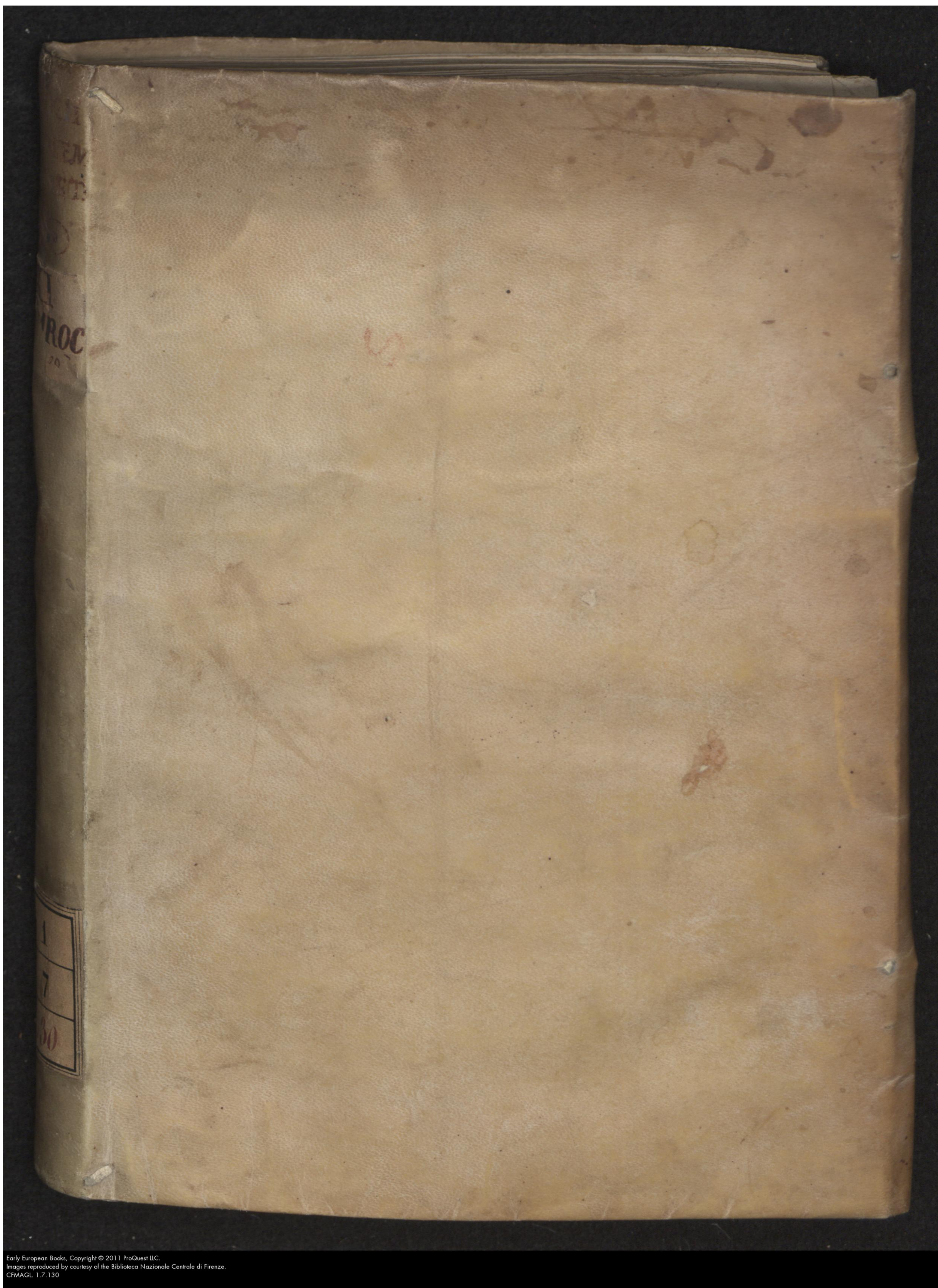
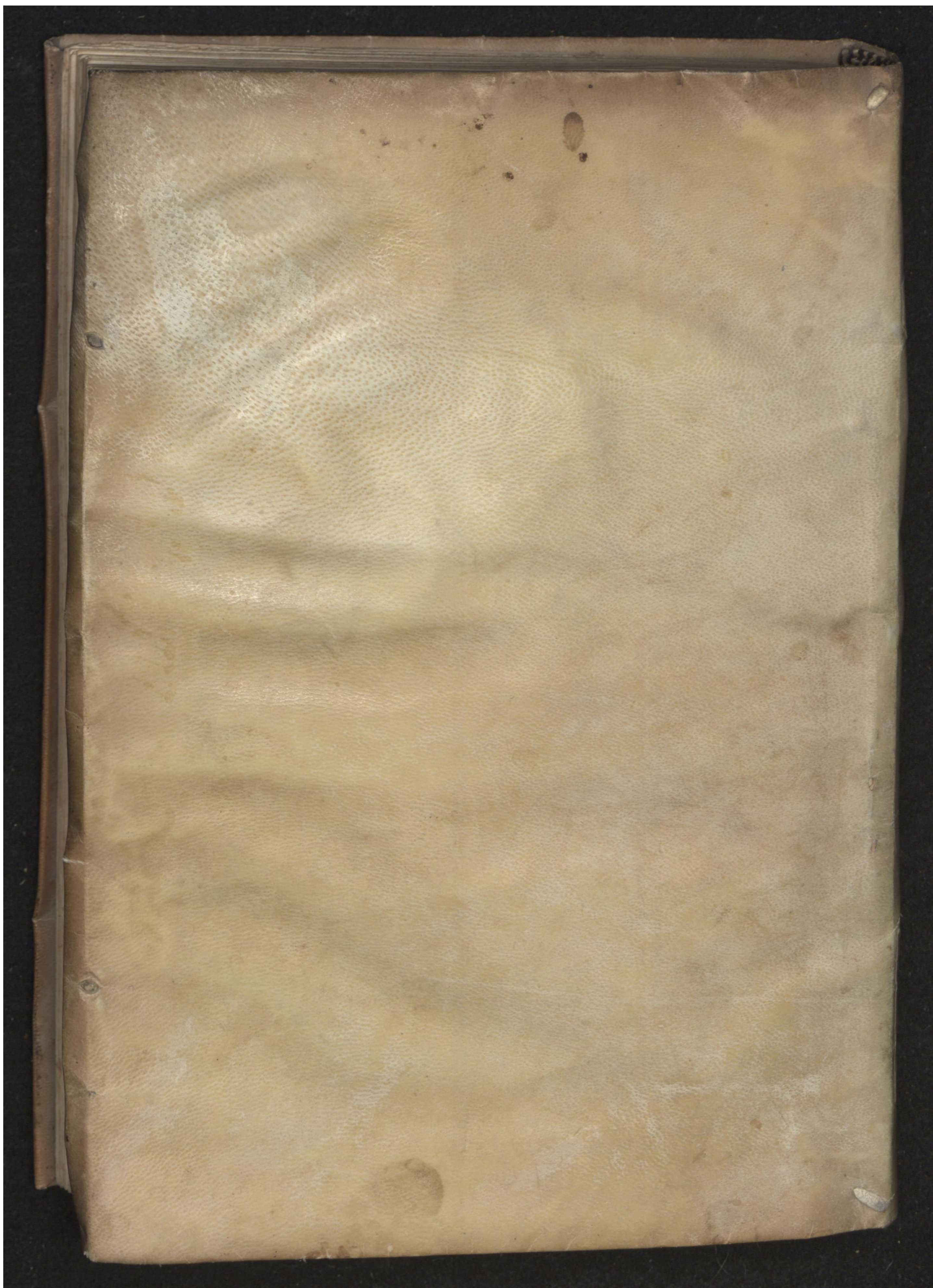
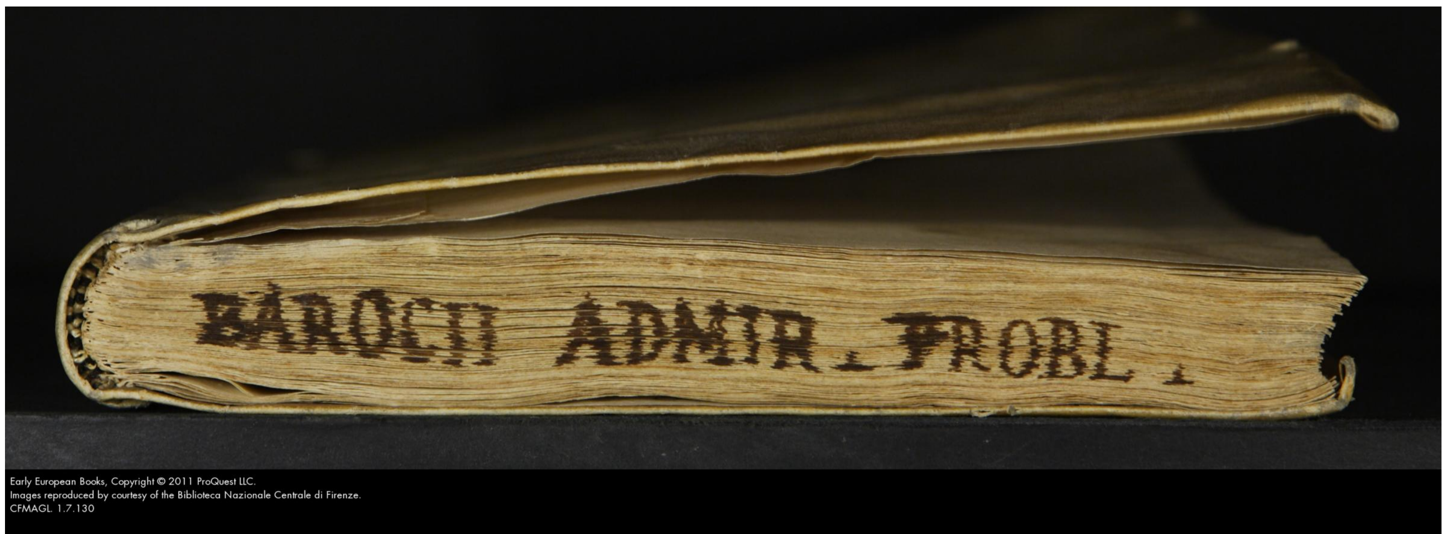


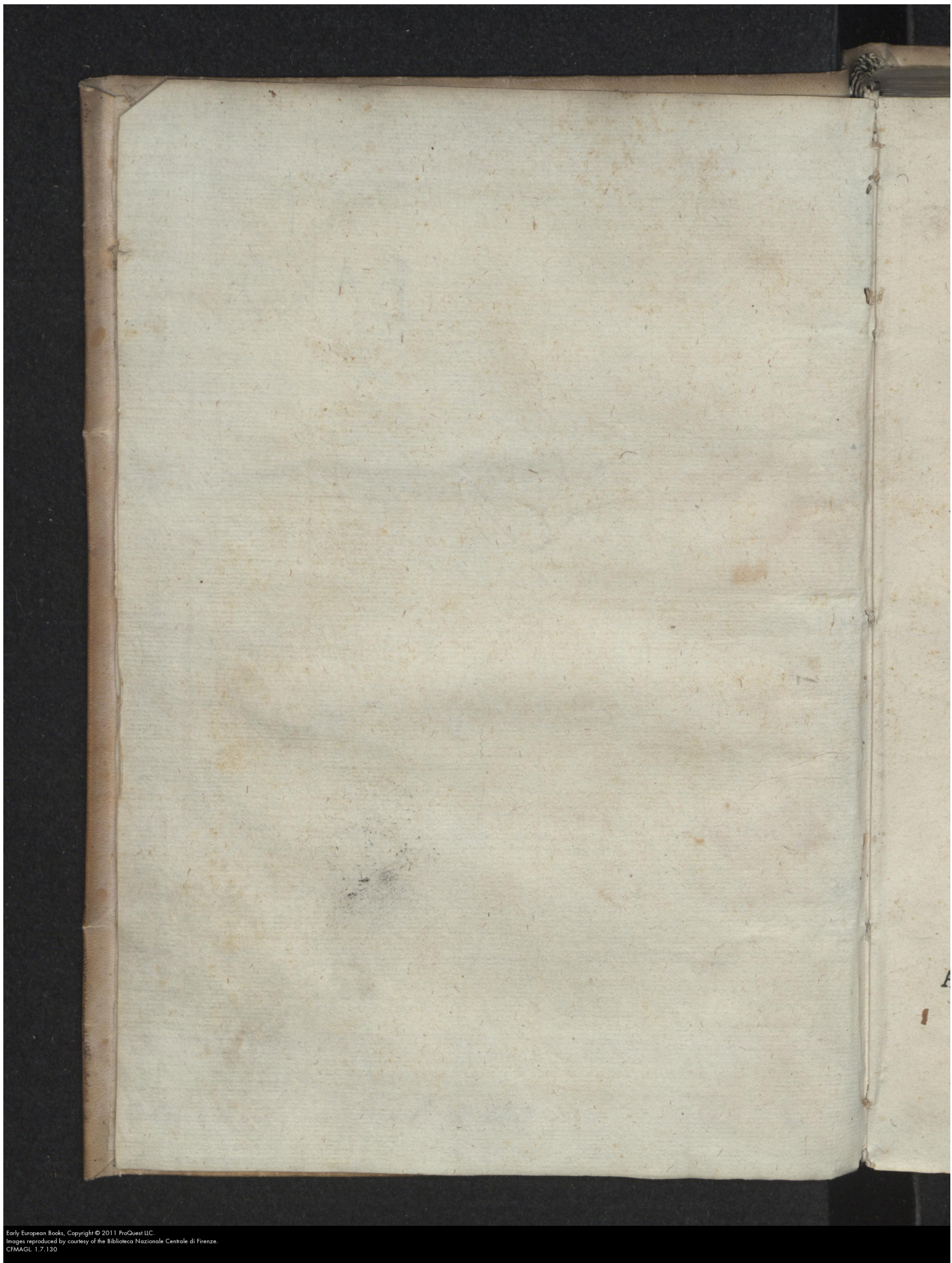

BAROCI
PROBLEM
GEOMETR
XI
1
7
130






BAROCII ADMIR. PROBL.





ADMIRANDVM ILLVD GEOMETRICVM PROBLEMA TREDECIM MODIS DEMONSTRATVM,

Quod docet duas lineas in eodem plano designare, quæ nunquam inuicem coincidant, etiam si in infinitum protrahantur: & quantò longiùs producuntur, tantò sibi-inuicem propiores euadant.

FRANCISCO BAROCIO IACOBI FILIO PATRITIO VENETO AVTORE.

Accessit etiam instrumentum quoddam olim ab eodem Autore inuentum, quo cuiuslibet Coni ortus, ac trium Conicarum Sectionum in Plano descriptio fit.

Cum Indice locupletissimo, eorum quæ toto opere continentur.

CVM PRIVILEGIO.




53

VENETIIS,
Apud Gratiosum Perchacinum, sumptibus Io. Baptistæ Fantini Patauini. M D LXXXVI.

AVTORES DE LINEIS NVNQVAM COINCIDENTIBVS, ET SEMPER SIBI MAGIS APPROPINQVANTIBVS IN EODEM PLANO IN INFINITVM PROTRACTIS.

QVI REI MENTIONEM tantùm fecerunt.

PROCLVS in ſuis Commentarijs in primum librum Elementorum Euclidis multis in locis.

GEMINVS in libro ſexto ſuarum Geometricarum Enarrationum.

GEORGIVS Valla Placentinus in libro primo ſuę Geometriæ Cap. LIX.

RABBI MOYSES Aegyptius in primo libro Cap. 73 ſui Operis inſcripti Director dubitantium.

COELIVS Calcagninus in quadam ſua Epiſtola.

QVI REM IMPERFECTE demonſtrarunt.

APOLLONIVS Pergæus in prima, & quartadecima Propoſitione ſecundi libri Conicorum.

PAPPVS in ſuis Scholijs in quintum librum Conicorum Apollonij.

EVTOCIVS Aſcalonita in ſuis Commentarijs in in ſecundum librum Archimedis de Sphæra, & Cylindro: & in librum ſecundum Conicorum Apollonij.

INNOMINATVS Antiquus Autor in fine libelli de Sectione Conica, quæ Parabole dicitur.

ORONTIVS Finæus in ſuo libello de Speculo Vſtorio.

IOANNES Vernerus in viceſima Propoſitione ſuorum Elementorum Conicorum.

RABBI MOYSES Narbonenſis in Opuſculo, quod de hac re compoſuit.

RABBI SAMTOV in expoſitione Cap. 73 libri primi operis inſcripti Director dubitantium Rabbi Moyſis Aegyptij.

HIERONYMVS Cardanus Mediolanenſis in libro ſextodecimo de Subtilitate.

IACOBVS Peletarius in ſecundo trium ſuorum Commentariorum De Dimenſione Circuli, De Contactu linearum, & De Conſtitutione Horoſcopi.

AD PRAESTANTISSIMVM NOSTRAE TEMPESTATIS MATHEMATICVM FRANCISCVM BAROCIVM.

NVPER ut argutæ excepit me campus arenæ,
Dum lustro loca cuncta sagax, sitibundus, anhelans
Artis sacratæ sacros cognoscere fonteis,
Et fidum quærens tantis de heroibus unum
(Queis sophiæ summam licuit pertingere metam)
Tramite qui recto dubios deducat ad illam,
Duxq; salebrosæ callis nos extricet idem.
Hic mihi tu solers occurris magne BAROCI,
Diuino ingenio reseret qui hæc abdita nobis,
Quo duce, tantarum edocti mysteria rerum,
Dædaleos tutò anfractus superare queamus.
Ergo haud ingrati, tanto pro munere, par est
Laudemus cuncti, & grato te pectore amemus.
Quassis tu interea monumentis perge vetustis,
Docto tu radio, docto tu in puluere perge;
Indefessus opem conferre petentibus omnem.
Laudes inde tuas series æterna nepotum
Extollet Cœlo, clari simul inclyta texent
Vsque Geometræ tua scitis dogmata formis,
Axe suos dum vasta Polos premet orbita Mundi.

Alexander Synglitícus Cyprius.

IDEM AD LECTOREM.

ECCE Geometrici (Lector) miracula Puncti,
Nostris nota parum, priscorum haud lucida scriptis.
Altera ad alterius (dictu mirabile) nutum
Se magis atque magis concordi, linea, cursu
Perpetuò inflectunt, inhiant vni vtraque Puncto;
Immo licet spatijs semper breuioribus absint,
Attamen æterno patulæ discrimine distant:
Aeternùm accedunt simul, æternumq; recedunt.
Ignibus ipsa prius spectabitur æquoris vnda,
Terraq; se rapidis miscere volubilis astris.
Aut simul ire Poli, totus quos diuidit Orbis,
Quàm simul vnitæ Puncto claudantur eodem.
Non hunc solertes apicem tetigere Latini,
Non plenè Eutocius, non sat Pergæus Apollon,
Non tota hoc docuit Graiorum turba Sophorum.
Arguti hoc Arabes, sublimi hoc mente Rabini,
Quotquot & hac fuerint præstantes arte Magistri
Mirandæ cuncti reticent mysterion artis.
Attamen hæc nobis arcana BAROCIVS vnus
Candidus impertit, profert hæc vnus apertam
In lucem, & valida rationum indagine fulcit.
Præ reliquis igitur merita illi laurea cedit
Totis Sicelidum votis decreta sororum.

IDEM AD FRANC. BAROC.

IVDICE vel Momo debentur magne BAROCI
    Munere pro magno munera magna tibi.
Sit tamen ista meis à te data venia dictis;
    Non venit hæc vni gloria tota tibi.
Ecce PALAEOTVS Musarum charus alumnus
    Ordinis eximij gloria magna sui,
Huic tu cede volens, operis sibi vendicat huius
    Dimidiam laudem, dimidiumq; decus.
Namque tibi toties felici, hic, omine, partus
    Istius edendi suasor & auctor erat,
Optasti quoties longos premeretur in annos,
    Forsan vt hoc careat posteritate bonum.
Sic bene prospexit sapienti mente CAMILLVS,
    Cuius fautrici tanta tenemus ope:
Aeternas ergo, Aonidum decus inclyte, laudes
    Grata debemus mente CAMILLE tibi;
Et nos quanta tibi, tibi tanta BAROCIVS ille
    Ille Geometrici Duxq;, Caputq; Chori.
Vsque Geometræ debent, omnes quoque Musæ,
    Grataq; posteritas (si qua futura) tibi.



Errata	ſic corrigito	Pagina	Linea.
in in ſecundum	*in ſecundum*	4	1
quamuis	*quanuis*	41	1
doplo	*duplo*	66	4
cum	*cùm*	74	4
ſit	*eſt*	79	24
partes P	*partes E*	79	31
ſecat	*ſecet*	90	22
ſecet	*ſecat*	90	23
quppecum	*quippecùm*	100	11
determinatam	*determinatum*	111	31
viceſimænonæ primi	*viceſimænonæ prop. primi*	121	18
E G	*F G*	125	8
eſſe : diceret	*eſſet dicere :*	136	4
tangentes	*tangentis*	145	27
primum	*primam*	159	8
I M	*K M*	159	33
contractus	*contactus*	166	1
ipſe	*ipſæ*	168	33
perieheriæ	*peripheriæ*	183	7
igi igitur	*igitur*	186	33
ſextadecimam	*ſextamdecimam*	200	11
pallatim	*paulatim*	205	3
tum tum circulis	*tum circulis*	217	20
fruſtratoriè	*fruſtra*	220	30
fruſtratoriæ	*ſuperuacaneæ*	227	14
GH	*KH*	247	26, & 35
GH	*KH*	248	5, & 22

correcta omnia

FRANCISCI BAROCII
AD CAMILLVM PALAEOTVM
VIRVM CLARISSIMVM
Præfatio.



ONNVLLA in Geometria Problemata, & Theoremata sunt (Camille vir præstantissime, ac eruditissime) quæ cùm admiratione digna sint, hoc sibi nomen uendicarunt, ut à Geometris admiranda uocarentur: non profectò quia Geometris admiranda videantur (qui enim rerum causas sciunt, effectus admirari non possunt) sed quoniam vulgo geometricas eorum causas ignoranti absurda, incredibiliaq; apparent. Tale quidem est illud Problema. Super vna parte lateris trianguli duas rectas lineas introrsum constituere duobus reliquis eiusdem trianguli lateribus maiores, & minorem angulum quàm ea latera continentes. Quomodo.n. admirabile non est, si rectæ quidem lineæ super toto latere introrsum constitutæ, externis minores, & maiorem angulum comprehendentes ab Euclide demonstratæ sunt: quæ verò super parte ipsius lateris constituuntur, eisdem externis maiores, & minorem angulum comprehendentes sint? Huiuscemodi verò illud etiã est Problema, quod ait. Triangulum quadrilaterum reperire habens angulum externum tribus internis æqualem, tres autem

Admiranda in Geometria Problemata, & Theoremataquę sint, & cur admirãda vocentur.

Admirandũ Problema.

Aliud admirandum Problema.

tem

tem internos duobus rectis minores. Nonne hoc etiam admiratu dignum erit, cùm definiat Euclides triangulum esse trilateram figuram, demonstretq; omnis trianguli angulum externum duobus internis ex opposito iacentibus esse æqualem: necnon tres internos duobus rectis æquales esse? Ex admirandis etiam est Pythagoricum illud Theorema. Tria sola Multangula totum, qui circa punctum vnum est locum replere possunt, nempe Triangulum æquilaterum, Quadratum, & Sexangulum æquilaterum simul, & æqui angulum. Si enim Triangulum, Quadratum, & Sexangulum locum ipsum replent; cur Quinquangulum etiam, & Octangulum, cæteraq; Multangula eum replere nō possunt? Ex admirabilium numero illud quoque Theorema est. Figurarum planarum rectilinearum quædam habent ambitus quidem, siue circuitus æquales, areas verò inæquales: & è conuersô, areas quidem æquales, ambitus verò inæquales, & quæ quidem minores habent ambitus, quandoque æquales quoad aream, quandoque maiores sunt ijs, quæ maiores ambitus habent: quæ verò quo ad aream minores sunt, si maioribus quoad aream comparentur, aliquando æquali, aliquando maiori ambitu fruuntur. Talia sunt ea Problemata, & Theoremata Geometrica, quæ admirabilia vocantur. Ex omnibus autem admirandis in Geometria propositionibus vna est cæteras admiratione, stuporeq; superans, quippe quæ demonstrat duas in eodem plano posse describi lineas, quæ nunquam adinuicem coincidant, etiam si in infinitū protrahantur: et quantò longiùs producuntur, tantò sibijnuicem propiores euadant. Vndè Rabbi Moyses Aegyptius

Admirabile Pythagoricū Theorema.

Aliud admirabile Theorema.

Propositio admirabilissima omniū Geometricarum Propositionum.

Rabbi Moysis Ægyptij dictum.

gyptius primo lib. cap. 73 sui diuini operis inscripti Director dubitantiũ, volẽs ostendere quod imaginatio non sit mentis operatio, sed à mente differat, hac vsus est ratione. Quoniam scilicet quædam mente percipiuntur, quæ imaginatio non capit, quam vtique rationem ex hoc confirmat, quòd iam dicta omnium admirabilissima propositio mente quidem percipitur, sub imaginationem verò non cadit. Quod sanè Rabbi Moysis dictum si ita intelligatur vt à multis exponitur, falsum nimirum esse videtur, ideoq; à nonnullis tanquam falsum refellitur. Nil enim à mente percipitur, quod etiam ab imaginatione non capiatur, quamuis diuersis modis, nempe à mente quidem intelligenter, ab imaginatione verò imaginanter. Mens nanq; cuncta simpliciter, & indiuisibiliter rationibus intelligit. imaginatio autem cõpositè, & partim diuisibiliter, partim indiuisibiliter formis in phantasia impressis res sibi subiectas imaginatur, atque cognoscit. Cùm enim phantasia inter mentem, et sensum media sit, vt docent Aristotelici, ac Platonici: imaginatio etiam, quæ circa Phantasiam versatur, inter mentem, sensumq; media erit. Cùm autem nil sit in mente, quod priùs non fuerit in sensu, vt Aristoteles docet: necessariò quicquid mens percipit, imaginatio etiam capit. Non datur siquidem ab extremo ad extremum, nisi per medium transitus. Aliter igitur dictum Rabbi Moysis intelligendum esse existimo. Quòd scilicet quædam mente quidem percipiantur, quæ imaginatio non capiat. Hoc est quibusdam rebus imaginatio non assentit, donec discurrens cogitatio causas earum inueniat, mensq; eas tanquam euidentes percipiat.

Quomodo dictum Rabbi Moysis intelligendum sit.

Quòd

Quòd enim duæ lineæ in eodem plano designatæ, si in infinitum producantur, nunquam inuicem coincidant, semperq́; magis, ac magis sibijnuicem appropinquent; sensus primùm videt in rebus materialibus, & sensilibus, & imperfectis: deinde imaginatio perfectiori quodam modo in Phantasia id imaginatur, in rebus imaginabilibus, & à materia sensibili separatis, & perfectioribus: postea verò cogitatio discurrẽs reperit huiusce rei causas, quibus rem ita se habere demonstrat: Postremò demum Mens ipsa rem iam demonstratam veluti verãpercipit, tuncq́; imaginatio, & sensus menti consentientes conquiescunt. Ecce igitur quòd mentis operatio ab imaginationis operatione differt, vt pulcrè concludit ipse Rabbi, si rectè verba eius intelligantur. Sunt autem aliæ quoque mentis ab imaginatione pulcherrimæ discrepantiæ, vt docent Philosophi, de quibus alibi sermo nobis etiam erit, vbi hoc Rabbi Moysis dictum, eiusq́; verba pleniùs expposituri sumus. Verum enim vero quum celeberrimam, ac mirabilissimam iam dictam propositionem in medium mihi attulisses, eiusq́; demonstrationem à me petijsses: cupiens ego desiderio tuo pro viribus satisfacere, quoddam onus non leue suscepi, à quo tandem Dei Opt. Max. ope expeditum me video. Opus enim de hac re integrum composui, in quo tredecim modis præfatam propositionem problematicè demonstraui, & quicquid ab omnibus tum antiquis, tum recentioribus, quos vidi, Autoribus de hac re dicta fuere, in vnum collegi: & ea quidem, quæ ab eis vel imperfectè, vel malè demonstrata fuerant, ad perfectionem, & exquisitam demonstrationem redegi: ea verò, quæ

Vide hoc in fine operis.

Propositũ, & Subiectum operis.

ab

ab eis falsò dicta sunt, rationibus confutaui, atque destruxi, vt rei veritas ab omni contradictione, controuersiaq; immunis redderetur. Talem autem in hoc opere ordinem seruaui. Primùm quidem more Mathematicorum principia quædam posui, atque declaraui, quæ vnà cum Euclidis Elementis confirmant quidquid in toto opere à me dictum est. Post principia verò tres propositiones demonstraui, quæ tanquam totius operis Elementa sunt. Deinde vndecim diuersas institutæ propositionis demonstrationes posui: quarum etiam Elementa, & Sumptiones ante eas semper demonstrationibus confirmaui; Corollariaq; necessaria ex eis excerpsi. Post vndecim autem demonstrationes, errores insigniores, & imperfectiones Autorum de hac re tractantium declaraui: falsasq; eorum opiniones redargui. Postremò denique libellum Rabbi Moysis Narbonensis de hac re compositum dilucidaui, in quo dilucidando reliquas etiam duas eiusdem propositionis demonstrationes illustraui, atque perfeci: dictum quoque Rabbi Moysis Aegyptij diligenter exposui, ac demum Diuino auxilio finem operi dedi. Cuncta verò hæc à me quamuis non exiguo labore, libenter tamen peracta sunt cùm vt integrè tibi satisfacerem, tum vt studiosis omnibus maximè prodessem. Omnes enim qui diligenter huic nostræ lucubrationi operam nauarint, non solùm admirandam illam propositionem perfectè, diuersisq; modis demonstrare scient: verum etiam ita in rebus Conicis exercebuntur, atque instruentur, vt omnes libros de Conicis scriptos, præsertimq; Apollonij Elementa perfectè intelligere poterunt: nec non à multis erroribus,

Ordo.

Finis.

Vtilitas. ribus, in quibus Autores elapsi sunt, sese abstinebunt. Quàm vtilis autem doctrina de Conicis sit, multi grauißimi viri attestantur, quippequi in ea tradenda maximè insudarunt: vt Conon, Apollonius, Serenus, Archimedes, & alij. Ex Conicorum enim doctrina multa humano vsui emolumenta proueniunt. Diuersa nanque Specula tum Conica, tum etiam Columnaria ea Perspectiuæ scientiæ pars, quæ Specularia dicitur, construere docet, quæ porrò mirabiles effectus nobis suppeditant. Fieri autem non potest vt dicta Specula rectè construantur ab eo, qui Conicorum Elementorum ignarus existit. Nam Speculum illud omnium Speculorum alioqui vtilißimum, quod per reflexionem radiorum Solis magna etiam, & durißima corpora comburit, quo Archimedes quoque in Syracusis naues comburebat, nonne ex Conica illa Sectione fit, quæ Parabole appellatur? Præterea centra grauitatum inueniri non possunt sine Conicarum Sectionum adminiculo, vt patet ex libris Archimedis de æquè ponderantibus, seu centris grauium planorum, & ex libro περὶ ὀχουμένων, quem nonnulli inscribunt de insidentibus aquæ, alij verò, de ijs quæ vehuntur in aqua. At centri grauium cognitio, nonne admodum necessaria est ad multas Machinas cùm in bello, tum in pace vtilißimas extruendas? Rursus Perspectiuæ scientiæ, quæ adeo vtilis est, omnia fundamenta ex Conicis dependent, quandoquidem omnis visio per Conum fit. Quinetiam multas alias vtilitates præbet Conicorum doctrina Astrologiæ, Mechanicæ, & Architecturæ, quas in præsentia, ne tædio te afficiam, silentio pertranseo. Vtilißima itaq; Conicorũ doctrina est, ad quam

opus

opus hoc nostrum breuiter instituit, dum propositionem præcipuè nobis institutam varijs modis demonstrat. Accipe igitur Camille nobilißime, atq; doctißime hunc nostrum laborem, qui sub tui nominis, totiusq; Academiæ nostræ fœlicißimis auspicijs in lucem prodiens, non parua cum autoritate in manibus hominum versabitur. Bononiæ Kalendis Ianuarij Anno Salutis M. D. LXVI. Dicatio.

Definitiones Primæ.

Definitio 1. ONVS est figura, quę describitur, quando vno rectanguli trianguli latere eorum, quæ circa rectum sunt angulum manente, circunductum triangulum, in eundem rursus locum restitutum fuerit, vnde moueri cęperat. Atque si manens recta linea æqualis fuerit reliquę circum rectum angulum existenti circunductæ, Rectangulus erit Conus: si verò minor, Obtusangulus: si autem maior Acutangulus.

2 Axis autem Coni est manens illa recta linea, circa quam triangulum vertitur.

3 Basis verò Coni, est circulus, qui à circunducta recta linea describitur.

4 Vertex, seu Fastigium, Culmen, Cacumen, Summitas, siue Apex Coni, est punctum supremum manentis rectæ lineæ circa rectum angulum existentis.

Ex his quatuor definitionibus tres priores ab Euclide positæ sunt inter initia libri vndecim Elementorum, & sunt ibi 18, 19, & 20. nos verò quartam etiam subiunximus iuxta Euclidis doctrinam. Apollonius autem Pergęus in principio primi libri Conicorum aliter hæc definiuit, vt in sequentibus definitionibus.

5 Si à quodam puncto ad circunferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum est, coniuncta recta linea in vtranque partem protrahatur, & manente puncto recta illa linea ducta circa circuli circunferentiam in eundem rursus locum restituatur, vnde ferri incępit: descriptam à recta linea superficiem,

quæ

quæ componitur ex duabus ſuperficiebus aduerticem inuicem iacentibus, quarum vtraque in infinitum augetur, deſcribente recta linea in infinitum producta, voco Superficiem Conicam:

Summitatem verò ipſius, punctum dictum: 6

Axim autem, rectam lineam ductam per punctum illud, & centrum circuli: 7

Conum autem, figuram contentam à circulo, & conica ſuperficie, quæ inter ſummitatem, & circuli circunferentiam interijcitur: 8

Summitatem autem Coni, punctum, quod ſuperficiei conicę ſummitas eſt: 9

Axim verò Coni, rectam lineam ductam à ſummitate ad centrum circuli: 10

Baſim demum Coni, circulum illum. 11

Conorum autem Rectos voco eos, qui Axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus: 12

Scalenos verò, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus Axes habent. 13

Sic ab Apollonio hæc definiuntur, quę porrò definitiones & numero plures, & locupletiores ſuperioribus quatuor Euclidis definitionibus ſunt. Non omnibus enim hiſce ab Apollonio definitis Euclides indiguit. Quum autem nobis in hoc libro cuncta hæc neceſſaria eſſent, non immerito iuxta doctrinam Apollonij, ſic etiam ea definire voluimus. Nam primum quidem definit Apollonius conicam ſuperficiem ex eius ortu, deinde conicę ſuperficiei tum Summitatem, tum Axem. Poſtea ex his Conum, eiuſque Summitatem, Axim, & Baſim definit. Poſtremò Recti, & Scaleni Coni definitiones tradit. Differunt autem definitiones Coni, & ſuarum Summitatis, Axis, & Baſis, quas de mente Euclidis poſuimus, ab eis, quas ſecundùm Apollonium tradidimus. Quoniam il-

Comparatio definitionū Euclidis definitionibus Apollonij.

Quo differant definitiones Apollonij ab Euclidis definitionibus.

læ quidem ab ortu Coni res ipsas explicant, hæ verò Conum tanquam à conicæ superficiei generatione constitutum accipiunt, eumque ex terminis, à quibus continetur, veluti ex differentijs specificis, similiterque eius Summitatem, Axim, & Basim definiunt.

Digressio.

Quatuor ad notanda. Not. primũ.

Quo differant summitas, & Axis conicę super ficiei à summitate, & Axe coni.

Quædam autem hìc animaduertenda sunt. Primò ꝙ licet Summitas, & Axis superficiei conicæ cum Summitate, & Axi Coni eædem esse videantur: differunt tamen, atque ex prioribus posteriorum cognitio dependet. Idcirco Apollonius seorsum quidem hasce ab illis declarauit. Cùm enim conicam superficiem vocasset eam, quę componitur ex duabus superficiebus ad verticem inuicem iacentibus, quippequę ex ductu rectæ lineę circa circuli circunferentiam vno ipsius rectæ lineæ puncto immobili permanente generantur: non immerito Summitatem ipsius conicæ superficiei, dictum immobile punctum definiuit. Ipsæ nanque duæ superficies totam conicam superficiem componentes in infinitum ex vtraque parte augeri possunt, si recta linea ipsas suo circunductu describens in infinitum ex vtraque parte protrahatur. Quare punctum illud manens, duasque dictas superficies ad verticem coniungens, totius conicæ superficiei Summitas erit. Recta verò linea ducta per illud punctum, & centrum circuli, erit conicæ superficiei Axis. Cùm autem Conum definisset figuram contentam à circulo, & conica superficie interiecta inter Summitatem, & circuli circunferentiam (hoc est figuram contentam à circulo illo, circa cuius circunferentiam recta linea circunuoluebatur, & parte totius conicę superficiei inter summitatem, & ipsam circuli circunferentiam iacente) merito Summitatem Coni esse dixit punctum illud, quod etiam superficiei conicæ Summitas esse definitum est: Axim verò Coni, rectam lineam ductam ab ipsa tum superficiei conicę, tum Coni Summitate ad iamdicti circuli centrum. Vnde manifestum est ꝙ Summitas, & Axis conicę superficiei à Summitate, & Axe Coni hoc discrepant, quoniam Summitas conicæ superficiei cõsideratur tanquam communis duorum Conorum vertex: Coni autem Summitas, tanquam vnius tantùm Coni fastigium. Similiter Axis conicæ superficiei duos Conorum duorum Axes in se cõtinet, Coni autem Axis, vnius tantum Coni Axis est. Quare non ab re Apollonius conicæ superficiei Axem dixit esse rectam lineam ductam per punctum illud, & centrum circuli: Coni verò Axem, rectam lineam ductam à Summitate ad centrum circuli. Nam illa quidem particula (per punctum

ctum illud, & centrum circuli] ostendit nobis ꝙ Axis conicæ superficiei debet à superiori duorum illorum Conorum aduerticem inuicem iacentium ita duci, vt transeat per punctum illud, hoc est conicæ superficiei Summitatem, illudq; in se amplectatur: nec non per centrum circuli. Illa verò particula [à Summitate ad centrum circuli] nobis indicat ꝙ Axis Coni debet initium sumere ab ipsa Coni Summitate, & peruenire vsque ad centrum circuli illius, circa cuius circunferentiam linea recta circunducta, & in eundem locum, vnde ferri incepit, restituta; conicam superficiem, Conumq; ipsum produxit, quem vtique circulum mox Coni basim esse Apollonius definiuit. Summitas igitur superficiei conicæ à Coni summitate differunt ratione, quamuis reipsa vnum, & idem sint punctum: Axis verò conicæ superficiei ab Axe Coni discrepat, vt totum à sua parte. Hoc itaq; primò erat animaduertendum. Secundò autem adnotandum est ꝙ ex Euclidis definitione tres habemus Conorum species, nempe Rectangulum, Obtusangulum, & Acutangulum, quas Apollonius non distinxit: sed duas ipse Conorum species definiuit, Rectum. s. & Scalenum, quæ quidem duæ species in qualibet trium Euclidis formarum considerari possunt. Conus. n. siue Rectangulus, siue obtusangulus, siue Acutangulus sit: cùm Rectus, tum Scalenus esse potest. Rectus quidem, si eius Axis suæ Basi ad rectos angulos sit: Scalenus verò, si eius Axis ad rectos suæ Basi non fuerit angulos. Causa autem propter quam Euclides quidem tripliciter, Apollonius verò dupliciter Conum diuiserint, hæc est: quoniam. s. Antiqui Geometræ affectiones quasdam vnicuique earum trium formarum proprias esse credidere, quas tamē omnes Apollonius demonstrauit in qualibet trium formarum Coni, dummodo Rectus sit. ex quo etiam magnus Geometres appellatus fuit. Quare non erat necessarium vt tres illas species Apollonius distingueret. Quoniam autem non omnia, quæ de Cono Recto dicuntur, Scaleno etiam conueniunt (vt in Apollonij doctrina versatis perspicuum est) propterea oportuit Apolloniū duas iam dictas Conorum species, Rectum. s. & Scalenum proprijs definitionibus distinxisse. Hic autem obiter animaduersione quoque dignum est, ꝙ siue Rectus, siue Scalenus sit Conus hoc habent commune, ꝙ vtriusque Basis circulus sit: hoc autem discrepāt, quòd Recti quidem Coni Axis Basi suæ ad rectos est angulos, Scaleni verò Axis Basi ad rectos angulos non est. Vnde quidam magnopere hallucinati sunt (inter quos etiam Cardanus

Not. secundum.

Tres conorū species secūdum Eucl.

Duę conorū species secūdum Apollonium.

Cur Euclides tres, Apollonius autem duas conorum species tradant.

Not. obiter.

Error quorundam, & Cardani.

in libro

in libro 16. de subtilitate) qui arbitrantur Conos Scalenos, quos ipsi Inclinatos vocant, non habere Basim circulum, sed aliam figuram à circulo diuersam. Quod nimirùm falsissimum est. Quoniam tales Coni, quorum Basis circulus nō est, neque etiam Coni sunt, sed Conorum partes. Quandoquidem omnis Coni Basis circulus esse debet, vt definitum est tum ab Euclide, tum ab Apollonio. Tertiò ad notandum est quòd definitio Coni tradita ab Euclide non competit nisi Cono Recto; Scaleno enim nullo pacto conuenire potest, vt rectè animaduertit Geminus in libro suarum Geometricarum enarrationum: Definitio verò superficiei conicæ ab Apollonio tradita Scaleno etiam cōuenit Cono, si (vt animaduertunt Pappus, & Eutocius in primū librū. Conic. Apollonij) protrahi, & contrahi ex vtraque parte intelligamus rectam lineam, quę circa circuli circunferentiam vertitur. Cùm igitur Conorum alius Rectus, alius Scalenus sit, & horum vterq; triplex esse possit, scilicet Rectangulus, Obtusangulus, & Acutangulus; hoc etiam vltimò animaduertendum est, quòd in sequentibus principijs cùm de Cono absolutè loquemur, Conum tantummodo dicemus: cùm autem de Cono Recto, partieulam [Rectum] Cono semper adijciemus. De Scaleno autem nullum sermonem habebimus tanquam præsenti tractationi nō necessario. omnia vero, quæ dicemus, tum in Rectangulo, tum in Obtusangulo, tum etiam in Acutangulo Cono vera esse intelligenda sunt iuxta doctrinam Apollonij, quem nos sequentes nullam de his tribus formis separatam mentionem faciemus; sed absolutè vel de Cono Recto, vel omnino de Cono sermo nobis erit.

Not. tertiū.

Not. quartū.

14 Conicæ Basis Dimetiens, est ipsa iam dicti circuli Dimetiens.

15 Plana superficies Conum secare dicitur, quæ conicam superficiem secat.

16 Plana superficies Conum tāgere dicitur, quæ cùm tangat conicam superficiem, quomodocunq; producatur, eam non secat.

Tres hasce definitiones superioribus definitionibus subiungere placuit, quoniam tractationi nostræ sunt necessariæ, quæ quidem prorsus conspicuæ sunt. Cùm autem reliquarū definitionū à nobis

ponendarum cognitio à quibusdam petitionibus huic tractationi necessarijs dependeat, propterea hæc nobis esse concedenda petimus.

Petitiones.



SI à Coni Vertice ad quodlibet conicæ superficiei punctum recta ducatur linea, tota erit in conica superficie. 1

Si verò in conica superficie duo quælibet puncta præter Coni Verticem recta linea coniungat, tota intra conicam superficiem cadit: Quòd si vltra duo illa puncta producatur, extra Coni superficiem exit. 2

Si Planum per Coni Verticem secet Conum; communis sectio conicæ superficiei, & Basis, & secantis Plani, Triangulum rectilineum est, quod Conum per medium diuidit, ipsumque per medium ab Axe Coni in duo triangula diuiditur. 3

Si Planum Coni Basi Parallelum Conum Rectum secuerit; communis sectio Plani secantis, & conicæ superficiei, circunferentia circuli est centrum habentis in Axe Coni, cuius Dimetiens est communis sectio, in qua dictum planum cum Plano ipsius Axis, seu trianguli Conum per medium diuidentis sese intersecant. 4

Si Planum Conicæ Basi non parallelum secãs Conum Rectum, haud per eius Verticem transierit: communis sectio eiusdem plani, & conicæ superficiei inflexa quædam, Mistaque est linea. 5

Hæ sunt Petitiones tum præsenti Tractationi, tum sequentium

definitionum perceptioni necessariæ, quas tanquam manifestas supponimus quoniam sensui patent, & quoniam ab Apollonio demonstratæ sunt. Nam primas quidem quatuor demonstrauit Apollonius in quatuor primis propositionibus primi libri Conicorum: quinta verò patet etiam ex secunda harum petitionum, & ex nona propositione eiusdem primi libri Conicorum. Ibi.n. demonstrat Apollonius eam sectionem, de qua nostrã quinta petitio loquitur, non esse circularem lineam. At neq; etiam recta est, quia si recta esset, per dictam secundam petitionem tota intra conicã superficiem caderet, & sic non esset in conica superficie, quod est contra suppositionem ipsius quintæ petitionis. Cùm autem neque recta, neque circularis sit: necessariò mista erit. Omnis.n. linea vel recta est, vel circularis, vel ex his mista. His itaque petitionibus positis reliquæ definitiones sequuntur.

Definitiones Secundæ.

Definit. 17. LATVS Coni dicitur recta linea, quæ à Coni Vertice vsque ad eius Basim tota est in conica superficie.

Hęc definitio ex prima petitione scaturire videtur.

18 Triangulum per Axem Coni vocatur illud, quod Conum per medium diuidit, ipsumq́ue per medium ab Axe Coni in duo triangula diuiditur.

Not. primũ. Hæc dependet ex tertia petitione. Adnotãdum est autem quòd hoc triangulum multi vocant Triangulum ab Axe Coni, fortasse quoniam ab Axe Coni per mediũ diuiditur. Sed meliùs est ipsum vocare Triangulum per Axem Coni. Quoniam semper tale triangulum trãsit per Axem Coni, cùm semper Conum per medium diuidere, ipsumq; per medium ab Axe Coni diuidi debeat. Axis.n. Coni in medio Coni semper est. Vel etiam sic vocatur, quoniam à plano Conum per Axim secanti fit. Præterea notãdum est, quòd in quolibet Cono infinita huiuscemodi triangula fieri possunt, nõ sem per æquicruria (vt malè Cardanus exponit.) Sed in Recto quidem Cono tum æquicruria, tum æquilatera. in Scaleno verò tum æquilatera,

Not. secũdũ.

Error Cardani in lib. 16 de subtilita.

latera, tum æquicruria, tum etiam Scalena. Quæ porrò Triangula cùm ab Axe coni per medium in duo triangula diuidantur; ea profectò duo, quæ inde fiunt triangula partialia non semper ambo rectangula, (vt ait Cardanus,) sunt, verùm in recto quidem Cono ambo rectangula semper erunt: in Scaleno autem, illa duo tantùm, quæ sunt dimidiæ partes eius trianguli, quod duo latera in Coni Vertice sese coniungentia æqualia habet. reliqua verò per Axem Coni Scaleni triangula cùm habeant duo dicta latera inæqualia, diuidunt quidem Conum per medium, ipsaque per medium ab Axe Coni diuiduntur, sed non in duo rectangula triangula. Aut.n.alterum tantùm eorum, aut neutrum rectangulum erit.

Alius error Cardani ibidem.

Basis trianguli per Axem Coni, est ipsa conicæ Basis Dimetiens. 19

Basis trianguli duplex cōsideratio.

Quum trianguli basis dupliciter à Geometris accipiatur, vel pro latere, quod è ragione ante oculos iacet, quando nullum antea latus nominatum est: vel pro tertio latere duobus iam præacceptis, & nominatis: non immerito ipsius per Axem Coni trianguli Basis semper esse dicitur ea recta linea, quam in 14 definitione Conicæ Basis Dimetientem esse diximus. quando quidem hæc linea semper est latus illud trianguli per Axem Coni, quippe quod è regione ante nostros oculos iacet, dummodo Conus ipse super suā basim erectus maneat.

Conica sectio dupliciter accipitur, vel pro linea, vel pro superficie plana. Si pro linea suscipiatur, illa mista linea est, quæ à plano Conicæ Basi non parallelo secanti Conum Rectum, per eiusque verticem non transienti in conica superficie fit: Si verò pro plana superficie, illa plana superficies est, quæ continetur à iam dicta mista, & à recta linea, quæ conicæ basis, & iam dicti secantis plani communis sectio est. 20

Tota hæc definitio à quinta petitione dependet.

Conicæ Sectiones tres sunt Parabole, Hyperbole, & Ellipsis. Parabole quidem fit, quando planum secās 21

Parabole q.d fit.

Rectum Conum ad planum trianguli per Axem Coni erigitur, horumque Planorum communis sectio secans iam Basim, & alterum latus trianguli, reliquo eiusdem trianguli lateri parallela fuerit. Hyperbole verò fit, quando communis dictorum planorum sectio cum reliquo trianguli per Coni Axem latere vltra Coni Verticem producto coincidit. Ellipsis autem fit, quando eadem communis sectio secans alterum duorum ipsius trianguli laterum, & basi non parallela existens, cum reliquo latere intra Conum coincidit.

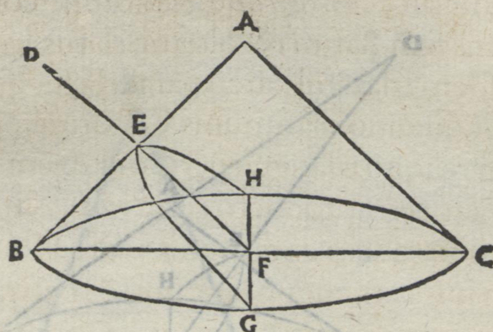
Hyperbole quid sit.

Ellipsis quid sit.

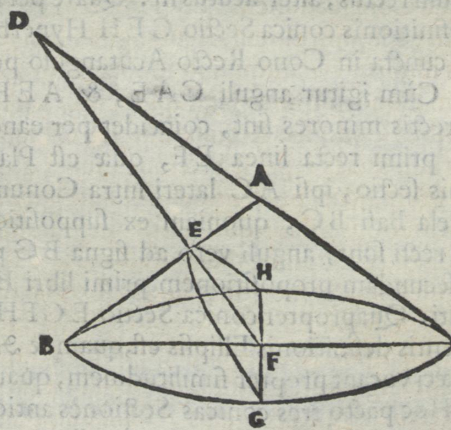
Hę sunt tres illę celeberrimæ conicæ sectiones, quas antiqui Geometræ in tribus Coni Recti formis inuenere, Parabolem quidem in Cono Rectangulo: Hyperbolem verò, in obtusangulo: Ellipsim autem, in Acutangulo. cùm enim, in Cono Rectangulo alteri laterũ trianguli per axem Coni perpendicularem rectã lineam duxissent, Parabolem inuenerunt. cùm autem in Obtusangulo Cono idem fecissent, Hyperbolem fieri deprehenderunt. Cùm verò in Acutãgulo idem egissent, Ellipsim oriri comperiere. Quas profecto tres Sectiones prisci alijs nominibus appellarunt. Nam Parabolem quidẽ, Rectanguli Coni sectionem: Hyperbolem verò, obtusanguli Coni sectionem: Ellipsim autem, Acutanguli Coni sectionem vocabant. putantes nimirùm vnamquamque harum trium Sectionum vnicuique trium Conorum speciei propriam esse. Apollonius autem in vno quolibet Cono seu Rectangulo, seu Obtusangulo, seu Acutangulo tres iam dictas reperit Sectiones iuxta diuersum planorum secantium situm, sicuti præsens definitio declarat. vocauit autem eas non communibus (vt antiqui) sed proprijs nominibus, Parabolem, Hyperbolem, & Ellipsim. Nam Rectanguli, seu Obtusanguli, seu Acutanguli Coni Sectio: cõe nomen est, quod tum Parabolę, tũ Hyperbolæ, tum demũ Ellipsi conuenit. quãdoquidẽ in vnoquoq; Cono vnaquæq; istarũ Sectionum fieri põt. Verùm vt apertiùs ea, quæ dicimus intelligantur, exempla in mediũ adducenda sunt. Sit igitur Conus Rectus, atq; Rectãgulus ABC, cuius vertex A, basis aũt circulus habens dimetientem B C; Triangulum verò per Axem Coni sit

Quomodo Antiqui tres conicas Sectiones in tribus Coni Recti formis inuenerint.

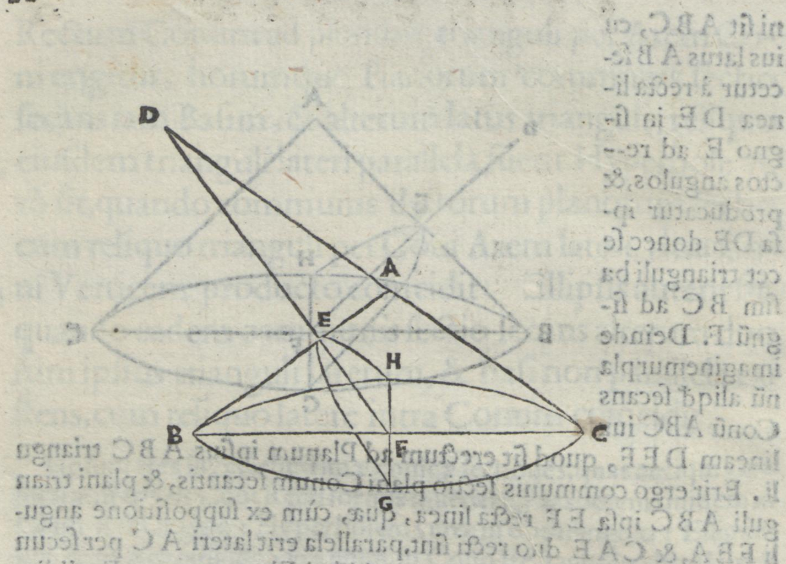
ni sit ABC, cuius latus AB secetur à recta linea DE in signo E ad rectos angulos, & producatur ipsa DE donec secet trianguli basim BC ad signũ F. Deinde imaginemur planũ aliqđ secans Conũ ABC iuxta



lineam DEF, quod sit erectum ad Planum ipsius ABC trianguli. Erit ergo communis sectio plani Conum secantis, & plani trianguli ABC ipsa EF recta linea, quæ, cùm ex suppositione anguli FEA, & CAE duo recti sint, parallela erit lateri AC per secundam partem 28 propositionis primi libri Elementorum Euclidis. Fit igitur per quintam petitionem huius in conica superficie quædã mista linea, quę sit GEH. Erit autẽ cõmunis sectio plani Conum secantis, & Basis conicæ recta GH linea. Quamobrem ipsa GEH Sectio conica, Parabole est per primã præsentis definitionis partẽ. Similiter fiant omnia vt priùs, sed ĩ Cono Recto Obtusangulo. Cũ itaq: duo anguli CAE, & AEF per suppositionẽ duobus rectis maiores sint (vnus.n: rectus, & alter



obtusus



obtuſus eſt) ſi latus A C producatur in partes A, coincidet neceſ-ſariò cum ipſa F E communi dictorum Planorum ſectione in lon-gum producta ad partes D per quintam petitionem primi libri Elementorum Euclidis. Anguli enim D A E, & D E A duobus ſunt rectis minores, cùm per 13 propoſitionem eiuſdem primi vnus eorum rectus, alter acutus ſit. Quare per ſecundam partem huius definitionis conica Sectio G E H Hyperbole eſt. Haud diſ-ſimiliter cuncta in Cono Recto Acutangulo peracta eſſe intelli-gantur. Cùm igitur anguli C A E, & A E F ex ſuppoſitione duobus rectis minores ſint, coincidet per eandem quintam Pe-titionem primi recta linea E F, quæ eſt Planorum dictorum communis ſectio, ipſi A C lateri intra Conum in ſigno E: nec eſt parallela Baſi B C, quoniam ex ſuppoſitione anguli ad ſi-gnum E recti ſunt, anguli verò ad ſigna B C per ſextam, & tri-ceſimamſecundam propoſitionem primi libri Elementorum Eu-clidis, acuti. Quapropter conica Sectio E G F H per tertiam par-tem præſentis definitionis Ellipſis eſt, quam & θυρεὸν, hoc eſt Cly-peum Græci vocant propter ſimilitudinem, quam habet cum ipſo Clypeo. Hoc pacto tres conicas Sectiones antiqui Geometræ in tribus Conorum formis reperiere. Apollonius autem alio artifi-

cio

cio in vno quouis Cono Recto eas omnes adinuenit. Sit vnus quilibet Rectus Conus, siue Rectangulus, siue Obtusangulus, siue Acutangulus ipse ABC, cuius Summitas A, Basis autem circulus habens dimetientem BC. Triangulum verò per axem Coni ipsum ABC, in

Quo Apoll. in vno quouis Cono Recto tres conicas Sectiones reperit.

ABC, in cuius Basi BC suscipiatur quodlibet punctum F, per quod ducatur per 31 propositionem primi lib. Elem. Euclidis recta FED linea parallela ipsi AC lateri, secans reliquum trianguli latus AB in signo E. Rursum à quouis ipsius BC basis puncto F ducatur recta linea FE, quæ non sit parallela ipsi AC lateri, sed coincidat cum eo producto extra Conum vltra Verticem A in signo D. Quod vtiq; semper eueniet quandocunq; anguli CAE, & FEA duobus rectis maiores facti fuerint. nihilq; prohibet quin in quouis Cono fieri possint. Præterea suscepto extra Conum quolibet D signo ducatur recta linea DEF secans duo latera trianguli ABC in signis E, F, & non sit parallela basi BC. Hisce

ita

ita dispositis imaginemur tria Plana secantia Conum ABC iuxta tres rectas EF lineas, quæ sint erecta super Planum trianguli ABC. Erunt communes quidem sectiones ipsorum Planorum, & Plani trianguli ABC tres EF rectæ lineæ. Communes autem eorundem Planorum, & Basis Coni sectiones erunt tres GH rectæ lineę, quæ oportet vt secent ipsam BC ad rectos angulos, vel omnes intra Conum, vel duæ semper intra, & vna extra, vt in superioribus figuris linea IK. Mistæ verò lineę per quintam petitionem huius in conica superficie tres erũt, nempe GEH, & GEH, & EGFH. quarum vna quidem erit Parabole, altera autem Hyperbole, tertia verò Ellipsis iuxta præsentis definitionis doctrinã. & sunt omnes in vno, eodemque Recto Cono, qualiscunque ipse sit. Sic etiam Apollonius vnico in Cono tres conicas Sectiones adinuenit. Causæ autem propter quas Apollonius vnam quidem harum trium conicarum Sectionum Parabolem, alteram Hyperbolem, tertiam Ellipsim nuncupauerit, non illæ sunt, quæ assignantur à Georgio Valla in libro quarto suæ Geometriæ cap. 3, & à Hieronymo Cardano in libro 16 de subtilitate, & à Federico Commandino in commentario suo in librum de Quadratura Paraboles Archimedis de mẽte Eutocij Ascalonitæ in primum librum Conicorum Apollonij. Nam Georgius Valla, & Federicus Commandinus inquiunt de mente ipsius Eutocij Parabolem quidem sic fuisse nominatam, quia communis sectio plani Conum secantis, & plani trianguli per axem Coni parallela est lateri ipsius trianguli. Commandinus enim refert Eutocij verba Græca dicentis Parabolem esse dictam ἀπὸ τῦ παράλληλον εἶναι hoc est à parallelũ esse. Hyperbolem verò sic dictã fuisse duabus aiunt de causis: primò quoniã duo anguli, qui in superioribus figuris sunt AEF, & EAC in Hyperbole duos rectos excedunt: secundò quoniam recta linea DEF in Hyperbole excedit Verticem Coni, & coincidit extra Conum ipsi CA lateri trianguli per Axem Coni in signo D. Ellipsim demum duabus similiter causis ita nuncupatam fuisse asserũt, aut quòd prędicti anguli in Ellipsi à duobus rectis deficiant, aut quòd Ellipsis sit circulus imminutus. Cardanus autem Parabolem quidem ait significare è ragione, & sic appellari: quia quantumcunque vnà cum ipso Cono producatur, semper est è ragione alterius lateris trianguli: Hyperbolem verò ita vocari dixit quoniam angulus AEF in ea maior est, quàm in Parabole: Ellipsim autem ita dici vult, quia

Digressio.

Trium conicarum sectionum etymologia.

Eutocij Ascalonitæ, & Federici Commandini, & Georgij Vallæ, & Hieronymi Cardani falsæ opiniones.

non vt Parabole, & Hyperbole potest in infinitum exstendi. Hę sunt causæ à iamdictis Autoribus redditæ. Quantùm autem à veritate alienæ sint, nobis rem ipsam rectè cōsiderantibus manifestum fiet. Quo nam pacto igitur aliquis etiam parùm in Geometria versatus sibi persuadere poterit quòd Parabole conica illa Sectio vocata sit quoniam communis sectio plani Conum secantis, & Plani trianguli per Axem Coni parallela est lateri eiusdem trianguli? Quid enim ipsi Parabolæ cum parallela? Nonne cuique græcas callenti literas manifestum est Parabolem nullo modo parallelum significare posse? Miror equidem Eutocium Ascolonitam rem hanc dixisse, cùm græcus fuerit. Rursus Parabolem significare è regione, credo neminem esse, qui fateatur. Quomodo ergo hac etiam ex causa sic appellabitur? Quòd si etiam parabole è regione significaret, cur etiam circulus qui à plano Conū Rectum secāte conicæ Basi parallelo fit, Parabole non dicitur, cum ipse quoque Basi trianguli eiusdem è regione sit? Præterea si Hyperbole quidem idest excessus vocaretur, quoniam duo iam dicti anguli duos rectos excedunt angulos: Ellipsis verò idest defectus diceretur, quoniam ijdem anguli à duobus rectis angulis deficiunt; cur ab internis potiùs angulis, quàm ab externis hæ figurę nomenclaturam sortitæ sunt? Non ne in Hyperbole anguli externi D A E, & D E A deficiunt à duobus rectis? Qur igitur non ab hisce etiam Ellipsis sectio hæc vocanda est? Similiter cùm in Ellipsi anguli externi duos rectos excedant, qua de causa Excessus etiam non vocatur? At si Hyperbole sic dicta est, quoniam recta linea D E F excedit Verticem Coni, & coincidit extra Conum ipsi C A lateri; cur è contrariò Parabole defectus non dicitur, cuius recta D E F linea supra Coni Verticem cū A C latere nunquā concurrit? Quòd si Hyperbole ita nuncupatur quoniam angulus A E F in ea maior est quàm in Parabole, cur etiam Parabole respectu ipsius Ellipsis excessus dicēda non est, cùm in ea quoque angulus A E F maior sit quàm in Ellipsi. vel cur non potiùs ab altero B E F interno angulo minori in Hyperbole quàm in Parabole existenti defectus denominabitur? Si demum Ellipsis ita vocatur quòd duo iamdicti interni anguli à duobus rectis excedantur, nullam video rationem, propter quam ab internis potiùs angulis Ellipsis, quàm ab externis Hyperbole nuncupanda sit. Si verò talem habuit denominationem, quòd sit quasi circulus imminutus; procul dubio Lunullaris etiā, vel Vtrinque conuexa, vel Cyssoides fi-

Opinionū superiorum cōfutatio.

des figura, quæ circuli diminuti esse videntur, Ellipsis nomine frui deberent. Si denique sic vocaretur, quia non vt Hyperbole, & Parabole potest in infinitũ extendi; hac eadẽ ratione circulus etiam, nec non tres supra nominatæ figuræ hoc nomen sibi vendicassent. Credo itaque neminem esse, qui non videat quòd causæ, & rationes ab hise viris traditæ omnino à veritate ipsa dissentiant, atque ridiculæ sint. Quapropter veræ causæ harum denominationum de mente Apollonij nobis assignandæ sunt, quas quidem causas Pappus etiam Alexandrinus in suis scholijs in primum librũ Conicorum Apollonij breuiter tetigit, & Commandinus in ipsa Apollonij editione in fine propositionum duodecimæ, ac tertiædecimæ de Hyperbole, & Ellipsi rectè adnotauit, quodammodo se corrigens de ijs, quæ dixerat in suo commẽtario in lib. Archimedis de Quadratura Paraboles: de ipsius Paraboles autem falsa, quã in iam dicto loco scripserat, etymologia, nusquam se correxit, sed in eũdem cum Eutotio, & alijs errorem permansit. Tradens itaque Apollonius ortum, & proprias Affectiones harũ trium Conicarũ Sectionum in 11, & 12, & 13 propositionibus primi libri Conicorũ, demonstrat vnã esse peculiarem proprietatẽ vnicuique harum trium Sectionum ab earum ortu scaturientem. quòd scilicet in Parabole quidem quarundam rectarũ linearum quadrata æqualia sint quibusdam parallelogrammis rectãgulis, quippe quæ cuidam datę rectæ lineæ ita adhærent, vt eius longitudinem nec excedant, nec ab ea excedantur, sed illa linea vnum eorum parallelogrãmmorum latus euadat: in Hyperbole verò, quòd earundem rectarum linearũ quadrata æqualia sint nonnullis parallelogrammis rectãgulis datæ cuidam rectæ lineæ sic inhærentibus, vt eius longitudinẽ excedant parallelogrammo simili, similiterque iacente cuidam alio dato parallelogrammo rectãgulo: in Ellipsi autem, quòd earundem rectarum linearum quadrata ęqualia sint quibusdam parallelogrammis rectangulis, quæ cuidam datæ rectæ lineæ ita inhærent, vt ab eius longitudine deficiant parallelogrammo simili, similiterque iacente cuidam alio dato parallelogrammo rectangulo. Cùm igitur tres iam dictas proprias harum trium Sectionum Affectiones ex earum ortu emergentes Apollonius demonstrauerit, nõ immerito ab eis ipsas denominauit. atque eam quidem, in cuius proprietate Applicatio Geometrica apparet, Parabolem, hoc est Applicationem appellauit. eam verò, in cuius peculiari Affectione Excessus Geo-

Veræ causæ nominũ triũ conicarũ sectionum.

metricus requiritur, Hyperbolem, ideſt Exceſſum vocauit. eam autem, in cuius accidenti proprio Defectus Geometricus apertiſſimè videtur, Ellipſim, nempe Defectum nuncupauit. Tres nanque celebres operationes in Geometria fieri ſolent, quippe quæ à Græcis antiquis Geometris vocatæ fuerunt παραβολὴ, ideſt Applicatio, ὑπερβολὴ, ideſt Exceſſus, & ἔλλειψις, ideſt Defectus. Cùm enim, data quadam recta linea ſpatium aliquod, ſeu figuram aliquam rectilineam ita ipſi coaptamus, vt ſpatium ipſum longitudinem lineæ non excedat, neque ab ea excedatur, ſed tota ipſa data linea vnum eius ſpatij latus euadat: tunc illud ſpatium ad illam rectam lineam applicari dicitur, & huiuſmodi operatio, Applicatio vocatur. Cùm autem ſpatium illud ita rectæ lineæ coaptamus, vt eius longitudinem excedat, & data recta linea vnius laterum eius pars ſit: tunc ſpatium illud excedere dicitur, atque operatio hæc, Exceſſus appellatur. Cùm verò ſpatium ita lineæ adaptamus, vt vnum eius latus pars lineæ datæ ſit, ſpatiumque totam rectæ lineæ longitudinem non impleat, ſed aliqua eiuſdem lineæ pars extra ipſum ſpatium relinquatur: tunc deficere ſpatium illud dicitur, & talis operatio, Defectus à Geometris nuncupatur. Hiſce porrò tribus Geometricis operationibus vſus eſt etiam Euclides in propoſitionibus 44 primi, & 27, & 28, & 29 ſexti libri Elementorum. Ab his itaque celeberrimis in Geometria operationibus Apollonius, omneſque iuniores Geometræ eas tres conicas nominarunt Sectiones, vnam quidem earum Parabolem, alteram Hyperbolem, tertiam Ellipſim vocantes, quandoquidem in generatione, & proprietate ipſarum tres iſtæ (vti diximus) operationes appareant, in vna quidem Applicatio ipſa, in altera autem Exceſſus, in reliqua verò Defectus. Optimæ enim illæ denominationes ſunt, quæ ab ortu, & proprietate rerum ſumuntur. Quæ cùm ita ſint, Latini ferè omnes boni Mathematici nomina harũ trium Conicarum Sectionum à nominibus dictarum trium Geometricarum operationum diſtinguere volentes, operationes quidem latinis ſemper nominibus exprimunt, nempe Applicationem, Exceſſum, atque Defectum: Sectiones verò conicas græcis vbique nominibus pronuntiant, Parabolem ſcilicet, Hyperbolem, & Ellipſim. Hæc de nominibus, & cauſis denominationis trium Conicarum Sectionum dicta ſufficiant. Meliùs enim intelligentur ea, quæ de cauſis nominum hìc diximus in progreſſu libri huius, vbi duodecimam propoſitionem primi libri Co-

Tres celebres in Geometria operationes.

Applicatio in Geometria quid ſit.

Exceſſus q. d ſit.

Defectus q. d ſit.

bri Conicorum Apollonij declarabimus. Nunc autem reuertentibus nobis eò vnde ſumus digreſſi, reliquum eſt adnotare quòd quanuis in Scalenis etiam Conis tres dictæ conicæ Sectiones iuxta doctrinam Apollonij reperiantur, nihiloſecius in Rectis tantùm Conis eas definire, & declarare voluimus; tum quia magis regulares in Rectis, quàm in Scalenis ipſæ ſunt; tum quia vt plurimùm Apollonius, cæterique Mathematici de Coni Recti Sectionibus ſermonem habent; adde etiam quòd huic noſtræ Tractationi neque Conus Scalenus, neque Sectiones ipſius neceſſariæ ſint. Vnde ſanè poſt hæc principia in tota pręſenti Tractatione vbicunq; abſolutè Conum dixerimus, de Cono Recto ſemper intelligatur. Digreſſionis finis. Notandum.

Placet autem hìc Inſtrumentum quoddam à nobis olim inuentum apponere, quod Conicam ſuperficiem, ipſosque Conos, tam Rectos, quàm Scalenos; tum Rectangulos, tum Obtuſangulos, tum etiam Acutangulos commodè generat: Necnon tres Conicas Sectiones, Parabolem ſcilicet, Hyperbolem, & Ellipſim aptiſſimè deſcribit. Ad cuius Inſtrumenti noſtri ſimilitudinē Circinus quoque ſimplex duorum crurium fabricari poteſt (vt Clariſſimus, eruditiſſimusque vir Iacobus Contarenus alter ętatis noſtræ Archimedes me nuper commonefecit huiuſcemodi Circinum repertum, ſibiq; oſtenſum, ac traditum fuiſſe ab Illuſtriſſimo Comiti Iulio Tiene, viro præſtantiſſimo, omnibus in ſcientijs, Arteque Militari egregiè verſato) quo etiam facillimè tres iam dictę Conicæ Sectiones deſignantur. Cuius Circini alterum crus, quod circunuoluendum eſt, concauum eſſe debet, habens in concauitate ſtylum dentatum mobilem, qui contrahendo ſe, ac protrahendo cuiuſdam denticulatæ rotulę, & laminę circa eā clauo circunuolutæ artificio ſurſum, deorſumq; feratur. Nam ſi planum, in quo Sectiones ipſæ Conicę deſignandæ ſunt, parallelū quidem Axi Inſtrumēti noſtri, vel immobili cruri Circini iam dicti poſitum fuerit, Parabole dubio procul deſcribetur: Si verò planum ipſum Axi, vel Cruri iam dicto non parallelum, ſed inclinatum verſus Inſtrumēti, ſeu Circini ſummitatem ſit, Hyperbole deſignatur: Si autem planum Axi, ſiue Cruri ipſi non parallelum, ſed è contrario in partem oppoſitam, ſcilicet verſus inferiorem Inſtrumēti, vel Circini partem inclinatum ponatur, Ellipſis deſcribitur. Quippe quod Inſtrumentum, necnon Circinum ipſum clarè figuræ ſequentes oſtendunt.

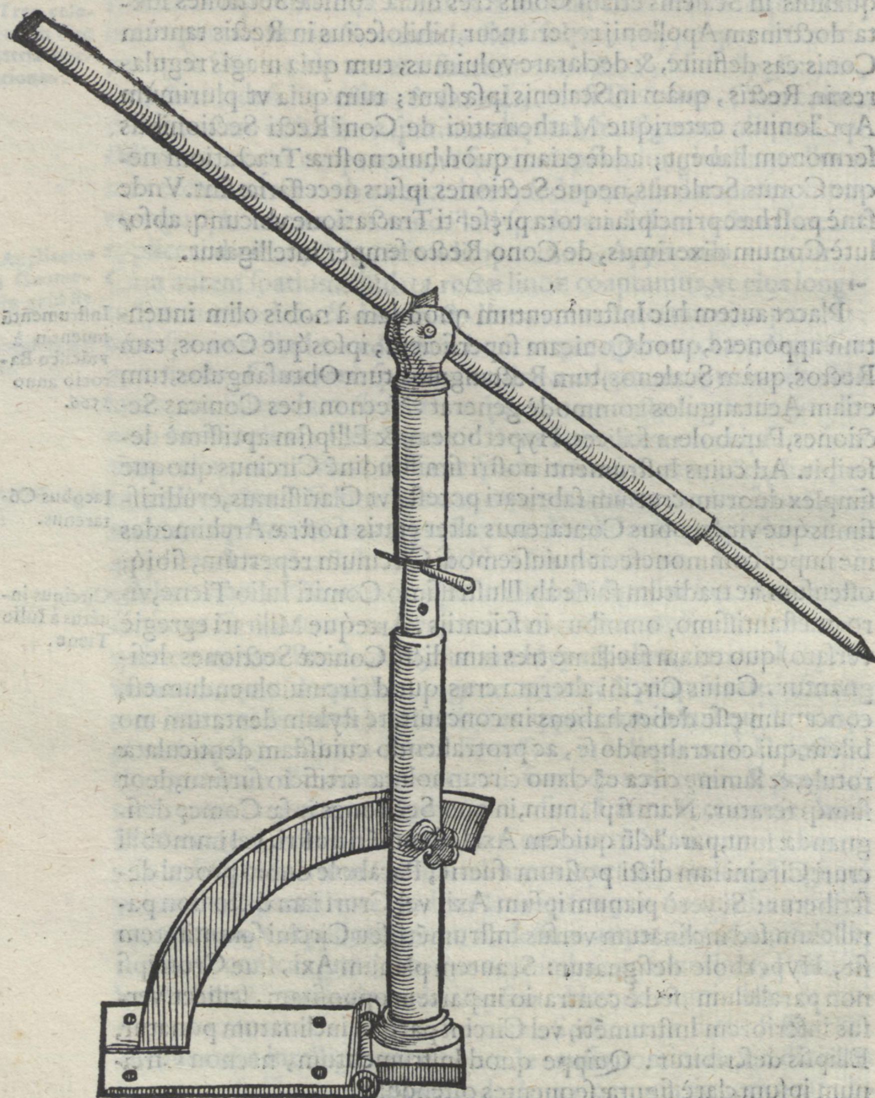
Inſtrumentū inuentū à Frāciſco Barocio anno 1566.

Iacobus Cōtarenus.

Circinus inuētus à Iulio Tiene.

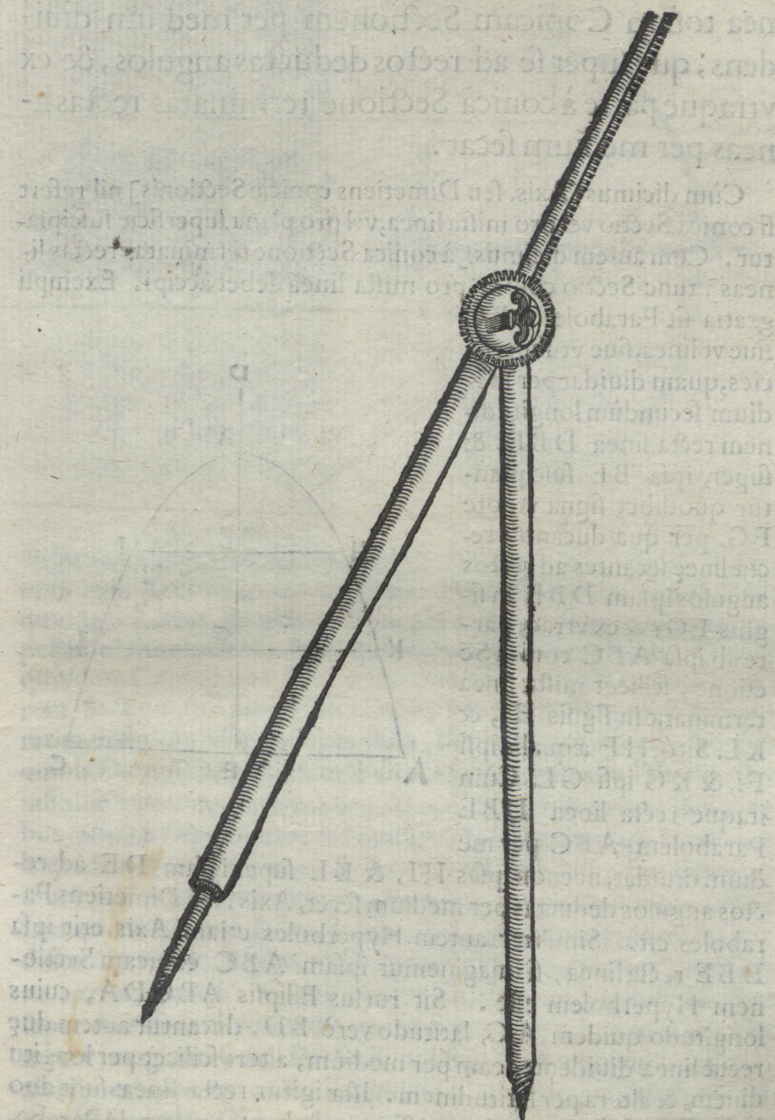
Figura

Figura ostendens Instrumentum iam dictum.



Figura

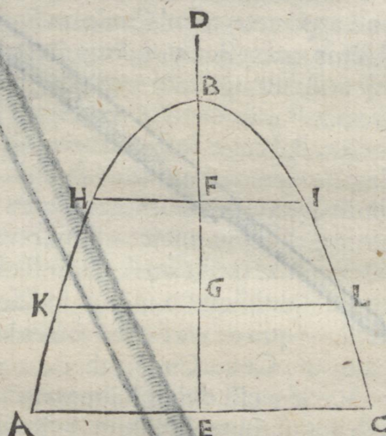
Figura ostendens Circinum iam dictum.



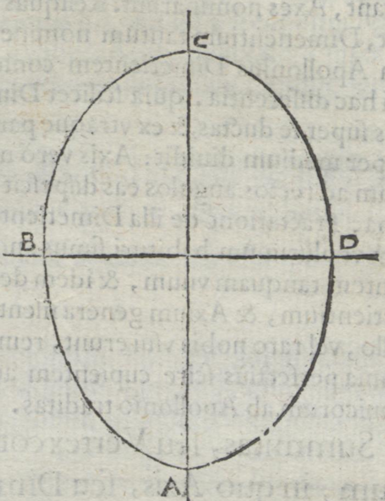
Axis,

Deffinit. 22. Axis, seu Dimetiens Conicæ Sectionis, est recta linea totam Conicam Sectionem per medium diuidens, quę super se ad rectos deductas angulos, & ex vtraque parte à conica Sectione terminatas rectas lineas per medium secat.

Cùm dicimus [Axis, seu Dimetiens conicæ Sectionis] nil refert si conica Sectio vel pro mista linea, vel pro plana superficie suscipiatur. Cùm autem dicimus [à conica Sectione terminatas rectas lineas] tunc Sectio conicæ pro mista linea debet accipi. Exempli gratia sit Parabole A B C siue vt linea, siue vt superficies, quam diuidat per medium secundùm longitudinem recta linea D B E. & super, ipsa B E suscipiantur quotlibet signa vtpote F G, per quæ ducantur rectæ lineę secantes ad rectos angulos ipsam D B E in signis F G: & ex vtraq; parte ab ipsa A B C conica Sectione, scilicet mista linea terminatæ in signis H I, & K L. Sitq; H F æqualis ipsi F I, & K G ipsi G L. Cùm itaque recta linea D B E Parabolem A B C per medium diuidat, necnon ipsas H I, & K L super ipsam D E ad rectos angulos deductas per medium secet, Axis, seu Dimetiens Paraboles est. Similiter autem Hyperboles etiam Axis erit ipsa D B E recta linea, si imaginemur ipsam A B C conicam Sectionem Hyperbolem esse. Sit rursus Ellipsis A B C D A, cuius longitudo quidem A C, latitudo verò B D. ducantur autem duę rectæ lineæ diuidentes eam per medium, altera scilicet per longitudinem, & altera per latitudinem. Istæ igitur rectæ lineæ sunt duo ipsius Ellipsis Axes eandem passionem habentes, quam de Paraboles, &



les,& Hyperboles Axe diximus. Horum autem Axium ipſum quidem Ac vocant Axim maiorem, ſiue Axem longitudinis, quoniam eſt maxima linea, quæ intra ipſā Ellipſi duci poſſit, & quoniam ſecundùm longitudinem Ellipſim per medium ſecat. ipſum verò B D, minorem Axim, ſeu Axim latitudinis appellant, quandoquidē minor eſt quàm A C, & iuxta latitudinem per medium totam Ellipſim diſpeſcit. Hoc itaque pacto hæc noſtra definitio intelligēda eſt. Nō me latet autem Apollonium diuerſas conicarum Sectionum Dimetientes, diuerſoſque Axes varijs modis definire. Quaſdam enim Tranſuerſas, quaſdam Rectas, quaſdam Coniugatas, & quaſdam Secundas appellauit Dimetientes. Axes autem quoſdam Simpliciter Axes, & quoſdam Coniugatos Axes nuncupauit. Præterea ſcio eum conicarum Sectionum Dimetientem ab earum Axe diſtinguere, & ſeparatim definire. Omnis enim Axis, Dimetiens etiam eſt, ſed non omnis Dimetiens, eſt etiam Axis. in ſphæra nanque Dimetientes infinitæ ſunt, vnus verò tantùm Axis. Similiter in conicis Sectionibus infinitæ Dimetientes eſſe poſſunt. At in Parabole, & Hyperbole quidem vnus tantummodo Axis: in Ellipſi verò, duo duntaxat erunt, maior ſcilicet, ſeu longitudinis: & minor, ſeu latitudinis. Nam Dimetiens quidem dicitur à dimetiēdo, quoniam figuram per medium dimetitur: Axis verò, ab agendo, quoniam circa ipſum figuræ circumaguntur. Quum igitur ex trium conicarum Sectionum ſuper Axes ſuas circunductu quatuor generari corpora ſolida Geometræ imaginati ſint, à Parabole quidem Rectangulum Conoides: ab Hyperbole verò, Obtuſangulum Conoides: ab Ellipſi autem, duo Sphęroidea, Oblongum ſcilicet, & Latum; idcirco Dimetiētes



Notandum.

Diuerſa genera Dimetientium, & Axium apud Apolloniū.

Quo differat Dimentiēs ab Axi.

Dimetiens vnde dicatur Axis vnde.

Quur in conicis ſectionibus alię Dimetientes, alij Axes vocētur: & quatuor ſolidæ quæ à conicis ſectionibus generantur.

eas, circa quas conicæ ipsæ Sectiones sese voluentes Solida illa generant, Axes nominarunt. Reliquas verò Dimetiẽtes, quæ in ipsis sunt, Dimetientium tantùm nomine appellarunt. Distinguit autem Apollonius Dimetientem conicarum Sectionum ab earum Axi hac differentia. quia scilicet Dimetiens quidem omnes parallelas super se ductas, & ex vtraque parte, à conica Sectione terminatas per medium diuidit: Axis verò non solùm per medium, verum etiam ad rectos angulos eas dispescit. His ita se habentibus, cùm in hac Tractatione de illa Dimetiente, quæ etiam Axis est, sermonem vt plurimùm habituri simus: non immerito Axem, & Dimetientem tanquam vnum, & idem definiuimus. Diuersa verò Dimetientium, & Axium genera silentio transiuimus: quoniam vel nullo, vel raro nobis vsui erunt, remittentes etiam lectorem, hæc omnia perfectiùs scire cupientem ad definitiones in primo libro Conicorum ab Apollonio traditas.

Dimetiens, & Axis quo differant secũdùm Apollonium.

Cur Axis, & Dimetiens hic non distinguantur.

Definit. 23.

Summitas, seu Vertex conicæ Sectionis, est punctum, in quo Axis, seu Dimetiens conicam Sectionem diuidit.

Hìc etiam cùm dicimus [Vertex conicæ Sectionis] vtroque modo conica Sectio accipi potest. cùm verò dicimus [conicam Sectionem diuidit] de mista linea intelligendum est. Summitas igitur seu Vertex conicæ Sectionis in superioribus figuris erit, in Parabole quidem, & Hyperbole punctum B: in Ellipsi verò duæ Summitates erunt, nempe punctum A, & punctum C. Adnotandum autem est quòd infinitis secundum Apollonium conicarum Sectionum Dimetientibus existentibus, infinitæ etiam erunt earundem Summitates. Summitas verò, quam nos definiuimus, præcipua conicarum Sectionum Summitas est: & de qua vt plurimùm mentio fit.

Notandum.

Definit. 24.

Latus conicæ Sectionis, est pars lineæ inflexæ, quæ citra Sectionis Axem in alterutram partem relinquitur.

Exempli gratia in superioribus figuris in ipsa quidem Parabole, & Hyperbole duo latera erunt AB vnum, & BC alterum: in Ellipsi verò si secundùm longitudinem latera suscipiantur, vnum erit ABC, & alterum ADC. Si autem secundùm latitudinem

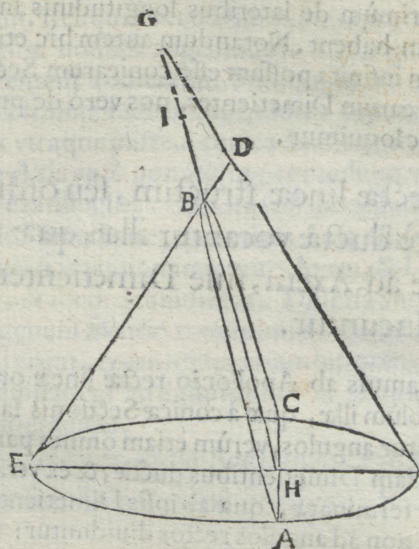
accipiantur, erit vnum quidem BCD, alterum verò BAD. Sed vt plurimùm de lateribus longitudinis in Ellipsi Geometræ sermonem habent. Notandum autem hìc etiã est q̃ secundùm Apollonium infinita possunt esse conicarum Sectionum latera iuxta infinitas earum Dimetientes. nos verò de præcipuis quoque lateribus hìc loquimur. Notandum.

Rectæ lineæ structim, seu ordinatim actæ, vel ordinatè ductæ vocantur illæ, quæ à conicæ Sectionis latere ad Axem, siue Dimetientem ad rectos angulos ducuntur. Definit. 25.

Quamuis ab Apollonio rectæ lineæ ordinatè ductæ vocentur non solùm illæ, quæ à conicæ Sectionis latere ad Axem ad rectos ducuntur angulos, verùm etiam omnes parallelæ rectæ lineæ super alijs etiam Dimetientibus ductæ, & ex vtraque parte à conica Sectione terminatæ, quæ ab ipsis Dimetientibus per medium licet etiam non ad angulos rectos diuiduntur: nos tamen priores tantùm definimus eisdem de causis, quibus Axem quoque solum, & non omnes Dimetientes definiuimus. Notandum est autem quòd eæ, quæ à nobis definiuntur rectæ lineæ ordinatè ductæ dupliciter in Ellipsi considerari possunt, vel ratione maioris, vel ratione minoris Dimetientis. Notandum præterea est quòd omnes ordinatæ ductæ dupliciter etiam accipiuntur, vel pro totis, vel pro partibus. tam enim ipsæ, quæ à conica Sectione vsque ad Axem, seu Dimetientem ducuntur: quàm ipsæ, quæ vlteriùs producuntur citra Dimetientem, vel Axem, quo vsque in altera parte conicam Sectionem iterum secent. Exempli causa in superiori figura tum tota HFI ordinatè ducta dicitur, tum quælibet eius partium HF, & FI, similiterque in alijs. Not. primũ. Not. secũdũ.

Centrum Hyperboles, est punctum diuidens per medium partem Axis Hyperboles iacentem inter Verticem Hyperboles, & punctum, in quo ipse Axis productus coincidit cum reliquo trianguli per Coni Axem latere vltra Coni Verticem producto. Definit. 26.

Exẽpli gratia sit Hyperbole ABC facta ĩ Cono DEF, vt superiùs dictum est. Et sit latus Coni productũ FDG, coincidens autem cum ipso recta linea GBH. ipsa igitur GBH erit Axis Hyperboles. Diuidit enim tum ipsam ABC Hyperbolem per mediũ, tum omnes rectas lineas sup ipsa BH ad rectos angulos ductas, & ex vtraq; parte à Sectione ABC terminatas.



Quandoquidem planum Hyperboles ABC erectum est ad planum trianguli DEF, quod Conum per medium diuidit: ipsa autem GBH in trianguli plano est, cùm eius ED latus in signo B secet. Si itaque ipsa GB totius Axis externa pars per medium diuidatur in signo I, punctum illud diuisionis, Centrum Hyperboles ab Apollonio, cæterisq; Mathematicis appellatur. Rectam verò IB, vocat Apollonius Lineam ex centro Sectionis, in suis secundis primi libri Conicorum definitionibus.

Linea ex Cẽtro Hyperboles, q̃ sit.

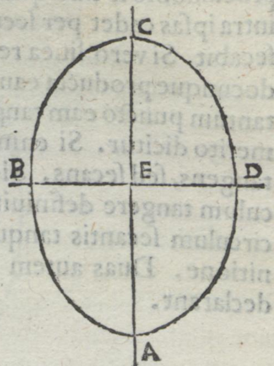
Definit. 27.

Centrum Ellipsis, est punctum, quod eius Axem, seu Dimetientem per medium diuidit.

Sit Ellipsis ABCDA, cuius duo sint Axes, seu Dimetientes, maior quidem AC, minor verò BD, qui necessariò in partes æquales seinuicem secant, cùm vterq; eorum totam Ellipsim per medium partiatur. Punctum igitur, in quo sese intersecant, quod verbi gratia sit E, ipsius Ellipsis Centrum dicitur; quoniam non solùm duas eius axes per medium diuidit, sed omnes etiam rectas lineas, quæ per ipsum ab vno Ellipsis latere ad alterum ducuntur.

Hæc

Hæc enim vna eſt ex Centri proprietatibus. Quamuis autem de Centro Ellipſis nullam in hoc opere faciemus mentionem, illud attamen definire voluimus, quoniam de Dimetientibus etiam ipſius Ellipſis mentionem ſuperiùs fecimus, & quoniam breuiter, & obſcurè Apollonius illud ſimul cum Hyperboles Centro definiuit. Nos verò ſeparatim vnumquodque definiuimus, vt agnoſcatur eorum differentia. alterum enim extra Sectionem eſt, alterum autem, intra. Quòd ſi etiam Parabole Centrum haberet, illud quoque à nobis definitum eſſet dilucidandę huius doctrinæ cauſa: ſed nullum ab Apollonio Centrum Paraboles poſitum fuit, quoniam nuſquam ipſo vſus eſt. At ſi punctum aliquod Centrum Paraboles vocandum eſt, aut erit centrum grauitatis Paraboles poſitum ab Archimede in propoſitione octaua libri ſecundi æquè ponderãtium: aut ſi imaginemur ab vno latere ad aliud latus Paraboles ductam eſſe ad rectos angulos Axi rectam lineam, quæ ab Axe ſecetur per medium, & altera quæuis duarum eius partium ſit æqualis parti ipſius Axis inter ipſam rectam lineam, & Sectionis Summitatem receptæ: punctum illud, in quo ſecatur ab Axi dicta recta linea, Centrum Paraboles appellari poterit, eo ꝙ tres ab ipſo ad conicam Sectionem æquales exeunt rectæ lineæ. Centri enim proprietas hęc etiam eſt, vt ab eo ad figuræ Ambitum rectæ lineæ ductæ inuicem æquales ſint. & quantò plures erunt æquales ipſæ lineæ, tantò veriùs ſignum illud Centrum vocabitur.



Centri proprietas.

De Centro Paraboles.

Vna Centri Paraboles cõſidetatio.

Alia eiuſdẽ cõſideratio.

Alia Centri proptietas.

Recta linea conicam Sectionem ſecare dicitur, quę duo inflexæ lineæ puncta coniungit. Definit. 28.

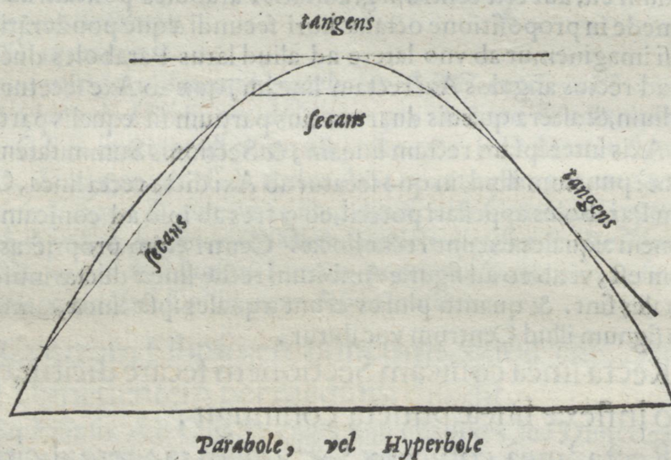
Recta linea conicam Sectionem tangere dicitur, quæ cùm ipſam tangat, quomodocunque producatur, eam non ſecat. Vnde manifeſtum eſt quòd in vnico tantùm puncto eam ſemper tanget. 29

Hæ duæ definitiones ex ſe prorſus dilucidæ ſunt. Cùm enim

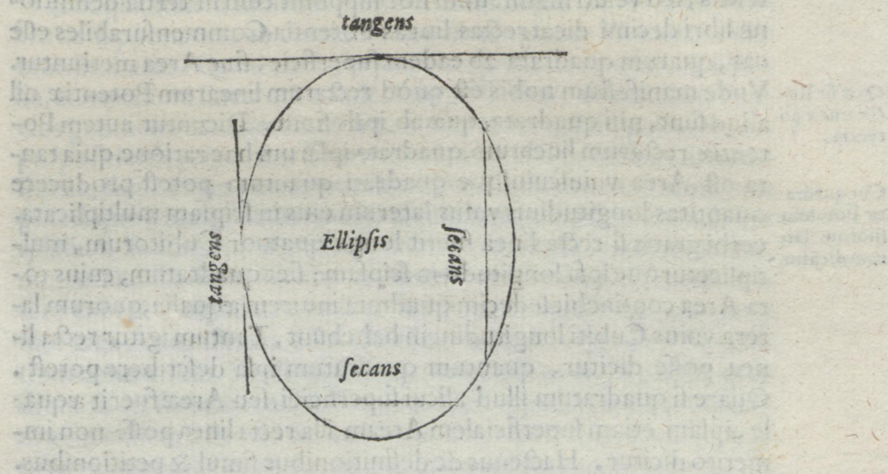
conicæ

conicæ Sectiones in conica superficie præter Coni verticem fiant, proculdubio si duo quælibet puncta recta linea in eis coniungat, intra ipsas cadet per secundam petitionem huius, easq; necessariò secabit. Si verò linea recta conicam Sectionem tangens quomodocunque producta eam non secet, nemini dubium quòd in vnico tantùm puncto eam tanget, ideoque tangens Sectionem non immerito dicitur. Si enim in duobus signis eam tangeret, non esset tangens, sed secans. Sic autem Euclides etiam rectam lineam circulum tangere definiuit. omisit autem definitionem rectæ lineæ circulum secantis tanquam manifestam ex ipsius tangentis definitione. Duas autem præsentes definitiones figuræ sequentes declarant.

Cur Euclides rectã lineam circulum secantẽ non definierit.



Parabole, vel Hyperbole



Inæquales circuli sunt, quorum Dimetientes, vel Semidimetientes sunt inæquales. Et maior quidem est, qui maiorem habet Dimetientem, vel Semidimetientem: minor verò, qui minorem. Definit. 30.

Dissimilia circulorum Segmenta sunt, quę inæquales angulos capiunt: aut in quibus anguli adinuicem inæquales sunt. 31

Circulos æquales, & Segmenta circulorum similia definiuit Euclides in definitionibus tertij libri Elementorum. inæquales autem circulos, & dissimilia circulorum Segmenta non definiuit, quoniam cognito vno contrariorum, facilè cognoscitur & alterum. Nos verò has duas definitiones hìc ponere voluimus, quoniam sæpenumerò in hac Tractatione ipsis vtemur.

Recta linea superficiem aliquam, seu superficialem Aream posse dicitur, cuius quadratum illi superficiei, seu Areę superficialis æquale est. Definit. 32, & vltima.

Nullibi declarauit Euclides quæ nam sit rectarum linearum potentia,

tentia, sed veluti manifestum hoc supponit cùm in tertia definitione libri decimi dicat rectas lineas Potentia Commensurabiles esse eas, quarum quadrata ab eadem superficie, siue Area metiuntur. Vnde manifestum nobis est quòd rectarum linearum Potentiæ nil aliud sunt, nisi quadrata, quæ ab ipsis fiunt. Dicuntur autem Potentiæ rectarum linearum, quadrata ipsarum hac ratione. quia tanta est Area vniuscuiusque quadrati quantum potest producere quantitas longitudinis vnius laterum eius in seipsam multiplicata. verbi gratia si recta linea fuerit longa quatuor Cubitorum, multipliceturque ipsa longitudo in seipsam; fiet quadratum, cuius tota Area continebit sedecim quadrata inuicem æqualia, quorum latera vnius Cubiti longitudinem habebunt. Tantum igitur recta linea posse dicitur, quantum quadratum ipsa describere potest. Quare si quadratum illud alicui superficiei, seu Areæ fuerit æquale, ipsam etiam superficialem Aream illa recta linea posse non immerito dicitur. Hactenus de definitionibus simul, & petitionibus.

Quæ sit Rectæ lineæ potentia.

Cur quadrata Potentiæ suorum laterum dicãtur.

Communes Sententiæ.



RATIONES eædem sunt, quæ ex eisdem componuntur Rationibus.

1 Quomodo Ratio ex Rationibus componatur docuit Euclides in quinta definitione sexti libri Elementorum, & Vitellio in vltima definitione primi libri suæ Perspectiuæ. Quomodo autem dicantur eædem esse Rationes ex sexta definitione quinti libri eorundẽ Elementorum patet. Si igitur Rationes, ex quibus aliquæ aliæ Rationes componuntur, eædem inuicem fuerint, illæ etiam compositæ ex eis Rationes eædem inter se erunt: si verò componentes fuerint diuersæ inter se, compositas quoque adinuicem diuersas esse necesse est.

2 A æqualium quadratorum æqualia sunt latera, & inæqualium inæqualia: maioris quidem maius, minoris verò minus. Et è conuerso linearum æqualium quadrata æqualia sunt, & inæqualium inæqualia: maioris quidem maius, minoris autem minus.

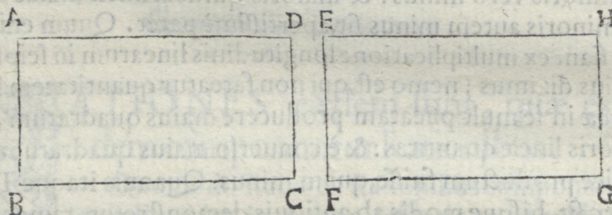
Hæc

Hæc quamuis à multis Recentioribus tanquã Communis Sententia supponatur, ab Antiquis tamen tanquam Theorema demonstrabatur. Quòd enim, æqualium quadratorum latera æqualia, & æqualium linearum quadrata æqualia sint, demonstrat Proclus geometricis rationibus in commentario quadtagesimæsextæ propositionis primi libri Elementorum Euclidis. quibus demonstratis, facilè etiam per demonstrationem indirectam demonstrari potest quòd inæqualium quadratorum inæqualia sint latera, & inæqualium linearum inæqualia quadrata: maioris quidem maius, minoris verò minus. Si enim quadratis inæqualibus existentibus latera eorum inæqualia non essent, sed æqualia; quadrata quoque ipsarum ex demonstratis à Proclo essent æqualia, quod est suppositioni contrarium. Similiter si lineis inæqualibus existentibus quadrata ab eis facta non essent inæqualia, sed æqualia; ipsæ quoque lineæ ex eisdem à Proclo demonstratis æquales essent, quod suppositioni oppugnat. Quòd autem maioris quidem quadrati maius latus, minoris verò minus: & maioris quidem lineæ maius quadratum, minoris autem minus sit, apertissimè patet. Quum enim quadrata fiant ex multiplicatione longitudinis linearum in seipsam, vt superiùs diximus; nemo est, qui non fateatur quantitatem longioris lineæ in se multiplicatam producere maius quadratum, quàm breuioris lineæ quantitas: & è conuerso maius quadratum à maiori radice productum fuisse, quàm minus. Quanuis itaque Theorema hoc sit, hisque modis ab antiquis demonstretur, tamen in præsenti nostro Opere tanquam Communem Sentẽtiam supponendũ esse duximus. Sicuti etiam Petitiones quasdam, & Definitiones superiùs supposuimus, quas Apollonius tanquam Theoremata demonstrauit. Fas est enim, in quibusdam operibus prima alicuius scientiæ Elementa non tradentibus, ea, quæ ab alijs demonstrata fuere, veluti principia supponere. sed in primis scientiarum Elementis (qualia Euclidis sunt) nil supponendum est, quod demonstratione confirmari possit.

Parallelogramma Rectangula longitudinem, & latitudinem æquales habentia; æqualia sunt: maiores verò, maiora: minores autem, minora. 3

In prima definitione secundi libri Elementorum docet Euclides omne Parallelogrammum Rectangulum contineri à duabus re

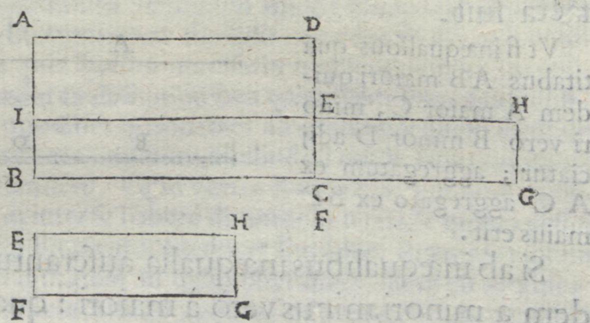
ctis lineis rectum angulum comprehendentibus. hoc est tantam esse cuiuscunque Parallelogrammi rectanguli Aream, quantum est id quod fit ex multiplicatione adinuicem duorũ eius laterum rectum angulum continentium. At duo cuiuscunque rectanguli latera rectum angulum continentia, nil aliud sunt, nisi eius longitudo, & latitudo. alterum enim longitudinem, alterum latitudinem tenet. Igitur ex ea definitione omnino manifestum est, quòd si quædam parallelogramma rectangula fuerint, quorum longitudo vnius longitudini alterius, & latitudo vnius latitudini alterius æquales fuerint; ipsorum etiam Areæ inuicem ęquales erunt: & si longitudo, & latitudo vnius, longitudine, & latitudine alterius maior fuerit; Area quoq; maiorem longitudinem, & latitudinem habentis maior erit, quàm Area eius, quod minorem longitudinem, & latitudinem habet. Potest autem geometrica etiam demonstratione hoc theorema confirmari. Sint duo parallelogramma rectangula A B C D, &



E F G H, quorum longitudines B C, & F G; nec non latitudines A B, & E F sint æquales. Dico quòd eorum etiam Areæ æquales sunt. Si enim inuicem parallelogramma hæc coniungantur ita vt B C longitudo F G longitudini indirectum sit, latitudo autem D C latitudini E F copuletur, communisque vtriusque rectanguli altitudo fiat: erit per primam propositionem sexti libri Elementorum Euclidis sicut basis B C ad basim F G, sic Area A B C D ad aream E F G H. Cùm autem B C ipsi F G ex suppositione sit æqualis, proculdubio Area etiam Areæ æqualis erit. Sint rursus duo parallelogramma rectangula A B C D, & E F G H, quorum ipsum A B C D habeat longitudinem B C, & latitudinem A B maiores longitudine F G, & latitudine E F ipsius E F G H. Dico quòd Area quoque ipsius A B C D maior est, quàm Area ipsius

E F G H.

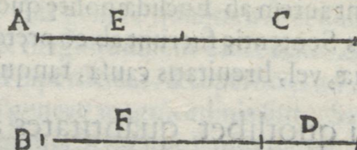
EFGH. coniungatur ipsũ EFGH ipsi ABCD ita vt FG latus sit in directum lateri BC, & copuletur FE cũ CD, à quo abscindet partẽ FE cùm minus sit EF quàm CD.



Producatur igitur per punctum E parallela ipsi CB quousque secet latus AB in signo I. Erit ergo per eandem primam sexti parallelogrammum BCEI maius parallelogrammo EFGH. Quare multo magis totum ABCD eodem EFGH maius erit. Demonstrata est igitur vtraque pars huius theorematis, quod in præsentia nos tanquam communem sententiam supponimus, rationibus superius allatis.

Si ab æqualibus inæqualia auferantur, reliqua inæqualia sunt: maius quidem, à quo minor ablatio; minus verò, à quo maior facta est. 4

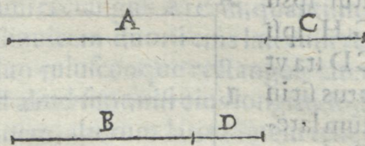
Exempli gratia si ab æqualibus AB quantitatibus inæquales partes auferantur ab A quidem C maior, à B verò D minor: reliqua E pars ipsius A minor est quàm F reliqua ipsius B pars.



Si inæqualibus inæqualia adiungantur maius quidem maiori, minus verò minori: aggregata etiam eodem modo inæqualia erunt, maius nempe, cui maior additio, minus autem, cui minor 5

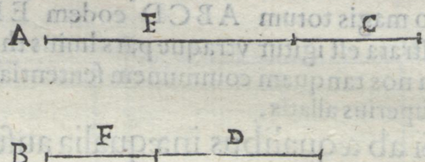
facta fuit.

Vt si inæqualibus quãtitabus AB maiori quidem A maior C, minori verò B minor D adijciatur; aggregatum ex A C aggregato ex B D maius erit.



6 Si ab inæqualibus inæqualia auferantur maius quidem à minori, minus verò à maiori: quæ remanent eodem modo inæqualia erunt, minus scilicet, à quo maior facta fuit ablatio, maius verò, à quo minor.

Vtpote si ab inæqualibus A B quantitatibus minor quidem pars C ab ipsa A maiori auferatur, maior verò D ab ipsa B minori: remanet E reliqua ipsius A pars maior quàm F reliqua pars ipsius B. Tres istæ veræ Cõmunes Sententiæ sunt, quoniam nulla demonstratione indigent cùm sensui pateant. Non, fuerunt autem ab Euclidæ positę quoniam multę etiam aliæ Communes Sententię fuerunt ab eo prętermissę vel tanquam ei non necessariæ, vel, breuitatis causa, tanquam sensui manifestæ.



7 Si quotlibet quantitates æquales ad quamlibet aliam eiusdem generis quantitatem comparentur; erunt omnes illa aut æque maiores, aut æque minores, aut ei simul æquales.

8 Quanta est aliqua quantitas ad quamlibet aliam, tanta esse potest quęlibet tertia ad quamlibet quartam.

Has duas Communes Sententias adiecit Campanus in principijs primi libri Elementorum Euclidis, quæ tamen ibi non erant adijciendæ tum quia Euclidi necessariæ non sunt, tum etiam quia intelligentia earum ex definitionibus quinti libri Elemẽtorum dependet. nam quotlibet quantitates ad quamlibet aliam eiusdem generis quantitatem comparare, nil aliud est nisi Rationes, quas ad illam habent ostendere. Quid autem Ratio sit, & quomodo quantitates Rationem inter se habere dicantur in tertia, & quinta definitione quinti libri Elementorum docet Euclides. Præterea tantam esse aliquam quantitatem ad quamlibet aliam, idem est ac si dicamus talem Rationem habere aliquam quantitatem ad quamlibet aliam; vel Multiplicem, vel Superparticularem, vel Superpartientem, vel ex his compositam. Quid autem Multiplex sit, in secunda definitionem eiusdem quinti docet Euclides: Quid rursus Ratio, & Rationem habere, in iam dictis tertia, & quinta definitionibus. Sensum igitur primæ harum duarum Communium Sententiarum tale est. Quòd si quotlibet quantitates æquales ad vnam quamlibet aliam eiusdem generis quantitatem comparentur, omnes ad eam eandem habebunt Rationem. Non ab re autem dictum est eiusdem generis, quoniam comparatio, atque Ratio non cadit nisi in quãtitatibus eiusdem generis, vt ex ipsa tertia definitione quinti libri Elementorũ habetur. Idem verò genus pro genere proximo hìc accipiendum est; vt numeri ad numerum, & magnitudinis ad magnitudinem, scilicet lineæ ad lineam, & superficiei ad superficiẽ, & corporis ad corpus. Discreta enim, & continua quantitas eiusdem generis sunt, cùm ambę sub genere quantitatis reducantur, nulla tamen inter numerum, & magnitudinem cadit Ratio, & comparatio. Quinetiam lineæ ad superficiem, & superficiei ad corpus nulla est Ratio, quamuis sub genere magnitudinis sint. Secundæ autem harum duarum Communis Sententię sensus hic est. Quòd eam Rationem, quam habet aliqua quantitas ad quamlibet aliam, eandemmet quælibet tertia ad quamlibet quartam habere potest. hoc est, si aliqua quantitas ad quandam aliam dupla fuerit, licet nobis accipere quamlibet tertiam, quæ etiam dupla sit ad quamlibet quartam. Et est animaduertendum quòd hìc quoque idem proximum genus in binis, ac binis terminis seruari debet: vt scilicet primæ duæ quantitates sint eiusdem generis, & similiter duæ posteriores. Nil refert autem si duæ primæ à duabus postremis genere differant.

Campanus reprehenditur.

Septimæ cõmunis sententiæ expositio.

Octauæ expositio.

Not. primũ.

differant. eam enim Rationem, quam habet numerus ad numerum, habere poteſt & magnitudo ad magnitudinem: & eam, quam habet linea ad lineam, ſuperficies quoque ad ſuperficiem, & corpus
Not. ſecũdũ. ad corpus habere poteſt. Animaduertendum etiam quòd Campanus limitat hanc ſecundam Cõmunem Sententiam dicens eam
Quomodo Campani limitatio intelligẽda ſit. vniuerſaliter veram eſſe in quantitatibus continuis, quoniam magnitudo in infinitum decreſcit: in numeris autem non eſſe vniuerſaliter veram niſi in Submultiplicibus, quoniam numerus creſcit in infinitum, ſed non in infinitum decreſcit; vnde poſſumus accipere duos minimos in aliqua Ratione numeros, quibus minores in eadem Ratione numeri dari non poſſint, propter Vnitatis indiuiſibilitatem. At ſi Vnitatem in partes diuiſerimus, vt Logiſtici, ſeu Supputatores docent, parteſq; Vnitatis pro terminis tanquam numeros acceperimus; dubio procul hæc Communis Sententia diſcretis etiam in quantitatibus vera vniuerſaliter erit.

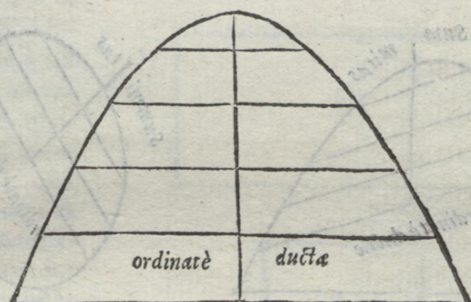
9 Si quotlibet quantitates proportionales fuerint ſicut prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam, & quinta ad ſextam, ſicq̃ue vſque ad infinitum, prima autem quàm ſecunda maior fuerit: erit & tertia quàm quarta, & quinta quàm ſexta maior. Quòd ſi prima fuerit æqualis ſecundæ, erit & tertia æqualis quartę, & quinta ſextę. Si verò prima quàm ſecunda minor fuerit, erit & tertia quàm quarta minor, & quinta quàm ſexta, cętereq̃ue in infinitum eodem modo.

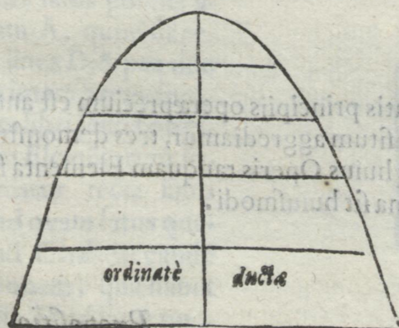
Hanc Communem Sententiam tanquam prorſus manifeſtam, à ſextaque libri quinti elementorum definitione dependentem vbique ſuppoſuit Euclides, idcirco nos eam hìc poſuimus, quoniam maximo nobis vſui futura eſt. Patet autem per ſe abſque vlla declaratione.

30, & vlt. Linearum ordinatè ductarum propinquiores Summitati Sectionis conicę ab eadem Summitate remotioribus minores ſunt.

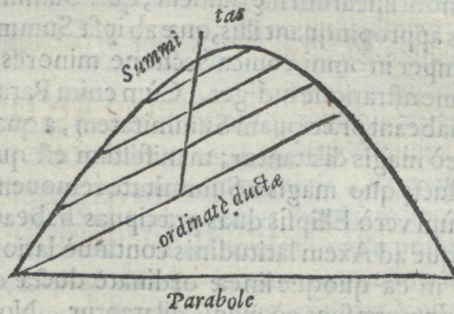
Quænam ſint in Sectionibus conicis lineę ordinatè ductæ ſuperiùs definiuimus. nunc autem hac Communi Sententia declaramus

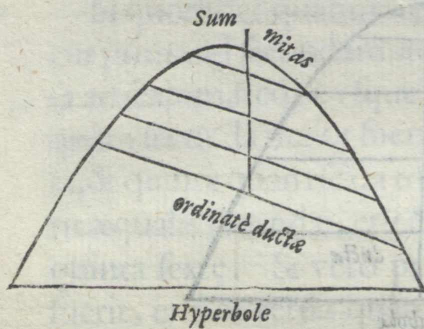
mus quòd eiusmodi linearum illę quidem, quæ Summitati conicæ Sectionis magis appropinquant illis, quæ ab ipsa Summitate magis remouentur semper in omni conica Sectione minores sunt. Hoc autem nulla demonstratione indiget. Cùm enim Parabole, & Hyperbole vnam habeant præcipuam Summitatem, a qua quo magis producuntur, eò magis dilatantur, manifestum est quòd lineæ in ipsis ordinatè ductę quo magis à Summitate remouentur, eò magis crescunt. cùm verò Ellipsis duas præcipuas habeat Summitates, à quibus vsque ad Axem latitudinis continuè latior sit, perspicuum est quòd in ea quoque lineæ ordinatè ductæ quo magis à Summitatibus remotæ sunt, eò magis dilatantur. Notandum autem ꝙ hęc Cōmunis Sētentia vniuersaliter vera est non solùm in lineis ordinatè ductis à nobis definitis, sed in oībus etiā ordinatè ductis, quæ ab Apollonio definitæ sunt. vt subscriptæ figuræ ostendūt. Notandum.

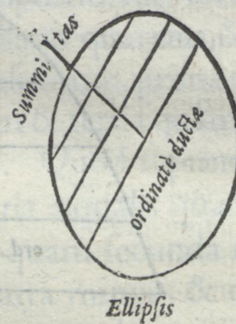












Positis iam, atque declaratis principijs operæprecium est antequam Problema nobis propositum aggrediamur, tres demonstrare propositiones, quæ totius huius Operis tanquam Elementa futuræ sunt. Harum autem prima sit huiusmodi.

Propositio

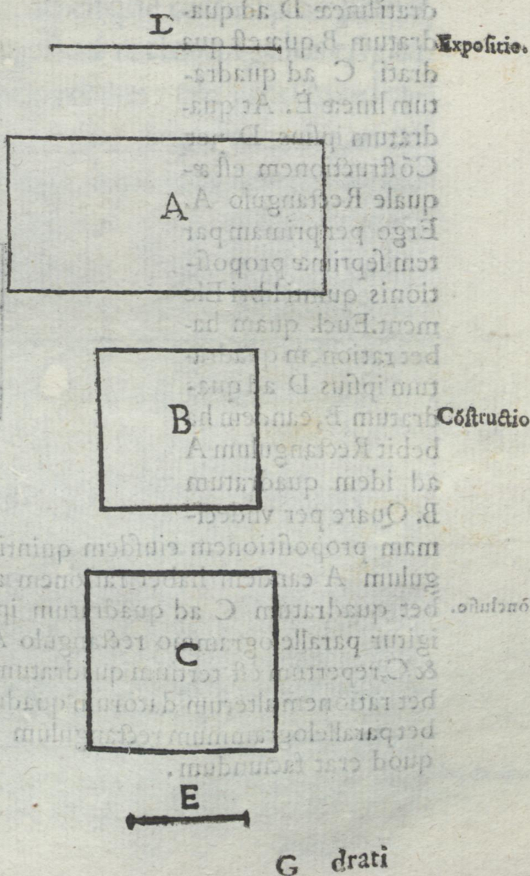
Propositio prima, Problema primum.

DATO Parallelogrammo Rectangulo, & duobus quadratis: inuenire tertium quadratum, ad quod eam habeat Rationem alterum datorum quadratorum, quam habet datum Rectangulum ad reliquum ipsorum quadratorum. Propositio.

Sit datum quidem parallelogrãmum rectangulum A, data verò duo quadrata B, & C. volo inuenire tertium quadratum, ad quod eam habeat rationem alterum quadratorum B, & C, verbi gratia ipsum C, quã habet rectangulum A ad reliquum quadratum B. Reperiatur itaque per vltimam propositionem secundi libri Elementorum Euclidis latus potens aream A, quod sit recta linea D; & per duodecimam propositionem libri sexti eorundem Elemẽtorum inueniatur recta linea E, ad quam latus quadrati C habeat eandẽ rationem, quã habet recta D ad latus qua-

Expositio.

Cõstructio.



G drati

Determinatio. drati B. Dico quadratum ipsius E illud esse, quod queritur.

Demonstratio. Quum enim ratio rectæ lineę D ad latus quadrati B, sit sicut rō lateris quadrati C ad rectam E, igitur per primam partem vicesimæ secūdæ propositionis sexti lib. Element. Eucl. eadem etiam erit ratio quadrati lineæ D ad quadratum B, quæ est quadrati C ad quadratum lineæ E. At quadratum ipsius D per Cōstructionem est æquale Rectangulo A. Ergo per primam partem septimæ propositionis quinti libri Element. Eucl. quam habet rationem quadratum ipsius D ad quadratum B, eandem habebit Rectangulum A ad idem quadratum B. Quare per vndecimam propositionem eiusdem quinti parallelogrammum rectangulum A eandem habet rationem ad quadratum B, quam habet quadratum C ad quadratum ipsius E rectæ lineæ.

Conclusio. Datis igitur parallelogrammo rectangulo A, & duobus quadratis B, & C, repertum est tertium quadratum ipsius E, ad quod eam habet rationem alterum datorum quadratorum, nempe C, quam habet parallelogrammum rectangulum A ad reliquum B quadratū, quod erat faciundum.

L

A

B

C

E

Propositio

Propositio Secunda, Theorema primum.

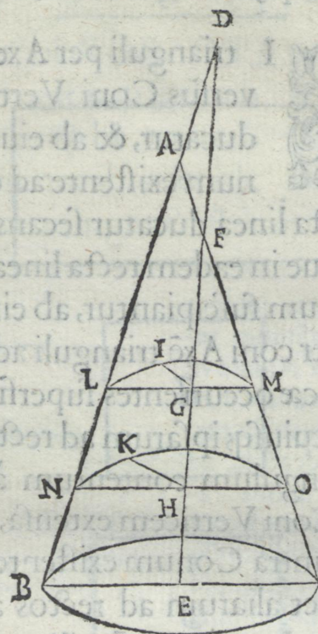
SI trianguli per Axem Coni alterum latus versus Coni Verticem indirectum producatur, & ab eius extremitate extra Conum existente ad conicæ Basis Dimetientem recta linea ducatur secans reliquum trianguli latus, atque in eadem recta linea quotcunque signa intra Conum suscipiantur, ab eisque rectæ lineæ plano ipsius per coni Axẽ trianguli ad rectos angulos erigantur conicæ occurrentes superficiei: erit ratio quadrati vniuscuiusq; ipsarum ad rectos angulos erectarum ad rectangulum contentum à tota sua conterminali versus Coni Verticem extensa, & parte ipsius conterminalis intra Conum existente; sicut ratio quadrati cuiuslibet aliarum ad rectos angulos erectarum ad Rectangulum à tota similiter sua conterminali, & eius parte intra Conum existente comprehensum. Propositio.

Sit ABC triangulum per Axem Coni, & conicæ Basis dimetiẽs BC. Et ipsius trianguli latus AB in partem A quantumlibet producatur per secundam pet. primi libri element. Euc. vsque ad D signum, à quo ad quoduis signum E in conicæ BC Basis dimetiente sumptum per primam petitionem eiusdem recta DE ducatur linea secans necessariò AC reliquum eiusdem trianguli latus in signo F, per 32 prop. & 9 com. sent. & 5 pet. primi libri Elementorum Eucl. & per 7 com. sent. huius. si recta scilicet DC linea ducta intelligatur, atque in EF recta linea quotlibet vtcunque assumantur signa vt GH, à quibus plano trianguli ABC ad rectos angulos rectæ lineæ per 12 prop. lib. xj. Elementorum Euclidis erigantur occurrentes conicæ superficiei in IK signis. Dico quòd ratio quadrati rectæ lineæ GI adrectangulum Expositio. Determinatio.

ctangulũ à DG, GF comprehensum, est sicut ratio quadrati lineæ HK ad rectangulum, quodà DH, HF continetur.

Constructio.

Intelligantur itaque duo plana conicæ Basi parallela secantia Conum, rectamque DE lineam in signis GH. quorum vtiq; planorum, & plani trianguli ABC cõmunes sectiones erũt per 3 prop. xi lib. Elem. Euc. rectæ lineæ, quæ sint LGM, & NHO. Communes autem eorundem planorum, & superficiei conicę sectiones erũt per 4 Petitionẽ huius circunferentiæ circulorũ LIM, & NKO, quorum Dimetientes sunt ipsæ LGM, & NHO. ipsæ verò GI, & HK rectæ lineæ per 2 prop. lib. xi. Elem. Eu. in eisdem cum lineis LGM, & NHO sunt Planis. ipsæ demum LM, & NO rectæ lineæ ipsi BC parallelæ sunt per 16 prop eiusdem lib. xi, vnde etiam inter se parallelæ sunt per 30 propositionem primi libri eorundem.



Hoc obscurè elicitur ex Vernero.

Demonstratio.

His ita constructis, si rectæ lineæ LI, IM, & NK, KO ductæ intelligantur, quoniam anguli quidem LIM, & NKO per 31 prop. libri 3 Elem. Euc. recti sunt; rectæ verò lineæ GI, & *HK* per Constructionem, & per 3 definitionem lib. II eorundem ad rectos sunt angulos ipsis LM, & NO rectis lineis: erunt per Corollarium octauæ propõnis libri sexti Elem. Eu. ipsæ GI, & *HK* mediæ proportionales inter LG, GM, & N*H*, *H*O rectas lineas. Quare per primam partem 17 propositionis eiusdem sexti Elem. erit Rectangulum ab LG, GM

Hoc etiã obscurè ex Verneri verbis elicitur.

compre-

comprehensum æquale quadrato ipsius GI: & Rectangulum ab N H, H O contentum æquale quadrato ipsius *HK*. Quoniam autem per prop. 23 eiusdem sexti æquiangula parallelogramma eam habent inter se rationem, quæ ex laterum suorum rationibus componitur; omnia verò parallelogramma rectangula per 4 petitionem primi lib. Elem. Euc. æquiangula etiam sunt: igitur ratio rectanguli à D G, G F contenti ad rectangulum ab L G, G M contentum componitur ex duabus rationibus, quarum vna est lateris D G ad latus G L, altera ipsius F G ad G M. Similiter ratio Rectāguli à D *H*, *H* F comprehensi ad Rectangulum ab N *H*, *H* O cōprehensum componitur ex ratione lateris D *H* ad latus *H* N, & ratione ipsius F *H* ad *H* O. At per Constructionē, & 2 partem prop. 29 primi, & quartam propositionem sexti libri Elem. Euc. ratio ipsius D *G* ad *G* L eadem est, quæ ipsius D *H* ad *H* N; & ratio ipsius F *G* ad *G* M eadem, quæ ipsius F *H* ad *H* O. Igitur ratio composita ex rationibus laterum D *G* ad *G* L, & F *G* ad *G* M; & ratio composita ex rationibus ipsorum D *H* ad *H* N, & F *H* ad *H* O eædem sunt per primam com. sent. huius. Qua propter per vndecimam propositionem quinti libri Elementorum Euclidis quater, & secundam partem 7 propositionis eiusdem bis sumptas ratio Rectanguli à D G, *G* F contenti ad Rectangulum ab L *G*, *G* M comprehensum, seu ad ipsi æquale quadratum lineæ *G* I, est sicut ratio Rectanguli à D *H*, *H* F comprehensi ad Rectangulum ab N *H*, *H* O contentum, seu ad ipsi æquale quadratū lineę *HK*. Ergo per Corollariū quartæ propōnis quinti lib. Elementorum Euc. ratio quadrati lineę *G* I ad Rectangulum à D *G*, *G* F comprehensum, est sicut ratio quadrati lineæ *HK* ad Rectangulum à D *H*, *H* F contentum. Quod est Propositum. Si igitur trianguli per Axem Coni alterum latus versus Coni Verticem indirectum producatur, & reliqua, vt in Propositione. Quod demonstrasse oportuit. Conclusio.

Corollarium.

Hinc fit perspicuum quòd recta linea HK maior est quàm GI.

Nam per Constructionem, & 29 prop. primi, & 4 prop. sexti, & 9 Com. Sen. primi lib. Elem. Eucl. & 9 Com. Sent. huius H N maior est

ior est quàm GL, & HO maior quàm GM. ergo per 3 Com. Sent. huius Rectangulum contentum ab NH, HO maius est Rectangulo ab LG, GM contento. At quadratum quidem ipsius HK æquale ostensum est Rectangulo ab NH, HO comprehenso, quadratum verò ipsius GI æquale itidem Rectangulo ab LG, GM contento. igitur per primam, & secundam partem 7 propositionis lib. quinti Elem. Eucl. & 9 Com. Sent. huius bis sumptam quadratum ipsius HK maius est quadrato ipsius GI. Quare per 2 Com. Sent. huius recta linea HK maior est quàm GI. & hoc est quod à Corollario proponitur. Eodem autem modo in alijs etiam omnibus huiuscemodi rectis lineis liquebit; quòd semper Basi conicæ propinquiores ab eadem Basi remotioribus maiores sunt.

Propositio tertia, Theorema secundum.

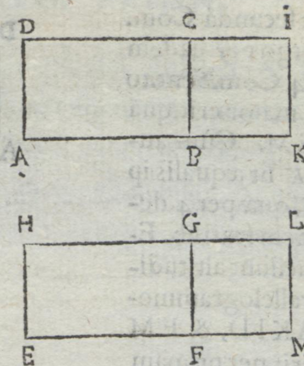
Propositio.



SI duo parallelogramma rectangula duobus quadratis ita adiungantur; vt vnum quidem cum ipsis commune latus habeant, duo verò duobus indirectum iacentia, atque duo hæc aggregata inuicem æqualia fuerint, si vnum vnius rectanguli latus ex indirectum iacentibus vni ex eisdem alterius rectanguli lateribus æquale fuerit: quadrata illa æqualia inuicem erunt. Si autem dicta latera inæqualia fuerint: quadratum, cuius lateri maius rectanguli latus in directum iacet, reliquo quadrato minus erit.

Expositio.

Sint duo Parallelogramma rectangula ABCD, & EFGH, quæ adiungantur quadratis BCIK, & FGLM ita vt recta quidem linea BC sit commune latus rectanguli ABCD, & quadrati BCIK; & similiter ipsa FG sit commune latus rectanguli EFGH, & quadrati FGLM: duo verò AB, & DC latera indirectum iaceant ipsis BK, & CI lateribus, & pari modo duo EF, & HG ipsis FM, & GL. Atq; duo hæc aggregata, nempe



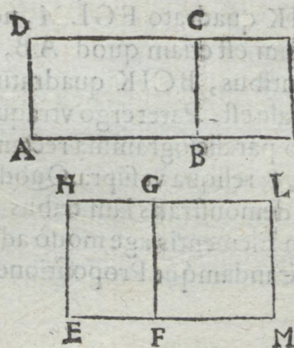
per rectangula AKID, & EMLH inuicem æqualia sint. Dico quòd si AB recta linea rectæ EF æqualis est, quadratū etiam BCIK æquale est quadrato FGLM. Si verò AB maior fuerit quàm EF, quadratum BCIK quadrato FGLM minus erit. Sint primùm AB, & EF æquales. Si itaq; BCIK quadratum FGLM quadrato ęquale nō fuerit; aut minus ipso, aut maius esse necesse est. Quòd si minus; ergo & BK latus ipso FM latere, & IK ipso LM minus erit per secūdā Com. Sent. huius. Quare per 4 Com. Sent. primi lib. Elemen. Eucl. tota AK minor erit quàm tota EM. est autem & IK minor quàm LM, igitur per 3 Com. Sent. huius Rectangulum AKID Rectangulo EMLH minus est, quod est suppositioni contrarium. Si verò quadratum BCIK quadrato FGLM maius esse dicatur, eisdem rationibus cōcludetur AKID Rectangulū ipso EMLH Rectāgulo maius esse, quod etiam suppositioni oppugnat. Non est igitur quadratum BCIK quadrato FGLM minus, neq; maius, ergo ipsi æquale, quæ est prima propositionis pars. Sint modo AB, & EF inæquales, AB scilicet maior quā EF, vt in secunda figura. Si igitur quadratum BCIK quadrato FGLM minus non fuerit, aut æquale ipsi, aut ipso maius erit. Quòd si æquale sit, latus BK lateri FM, & latus IK lateri LM

Determinatio.

Demonstratio primæ partis.

Duos casus hēt hęc prima ps, quos vide infra in digressione contra Vernerum.

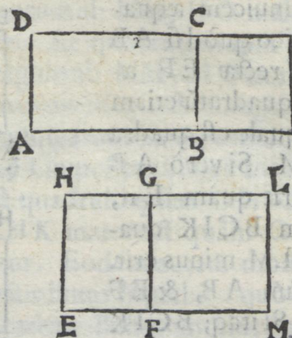
Conclusio primæ partis.



Demonstratio secundæ partis.

Tres habet casus secunda hæc pars, quos vide infra in digressione contra Vernerum.

æqualia erunt per iam dictam secundã Com. Sent. ergo per eãdem etiam 4 Com.Sent.tota AK maior erit quã tota EM. Cùm autem IK sit æqualis ipsi LM, quæ per 4 definitionem sexti lib. Elem.Euc.sunt altitudines parallelogrammorum AKID, & EMLH, erit per primam prop. eiusdem sexti ratio parallelogrammi AKID ad parallelogrammum EMLH sicut ratio basis AK ad basim EM. Atqui basis AK maior ostensa est basi EM, igitur per 9 Com.Sent.huius & parallelogrã mum AKID parallelogrammo EMLH maius erit. quod est contra suppositionem.Si denium BCIK quadratum maius FGEM quadrato quis esse dixerit, per eandem secũdam Com.Sent. BK erit maior quàm FM, & IK maior quàm LM. Vnde per quintam Com.Sent. huius tota AK maior erit quàm tota EM. ergo per 3 Com.Sent.huius Rectangulum AKID Rectangulo EMLH maius erit,quod iterum suppositioni aduersatur.



Cõclusio secũdæ partis. Existente igitur AB linea maiori quàm EF, neque maius est quadratum BCIK quadrato FGLM, neque ipsi æquale,sed minus.At qui ostensum est etiam quòd AB, & EF lineis inuicem æqualibus existentibus, BCIK quadratum de necessitate FGLM quadrato æquale est. Patet ergo vtraque Theorematis huius pars. Si itaque duo parallelogramma rectangula duobus quadratis ita adiungantur, & reliqua vt supra.Quod oportebat demonstrare.

Conclusio totius.

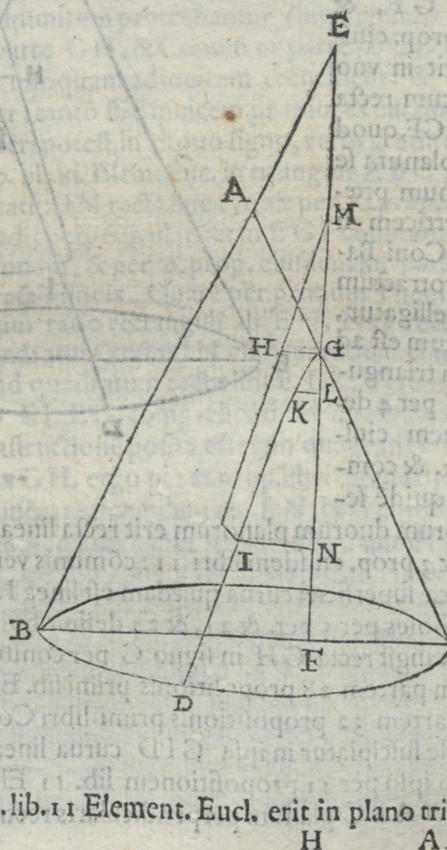
Verùm demonstratis iam tribus sequentium omnium demonstrationum Elementis,age modò ad institutam nobis Problematicam, admirandamque Propositionem accedamus.

PRO-

DEMONSTRATIO PRIMA.

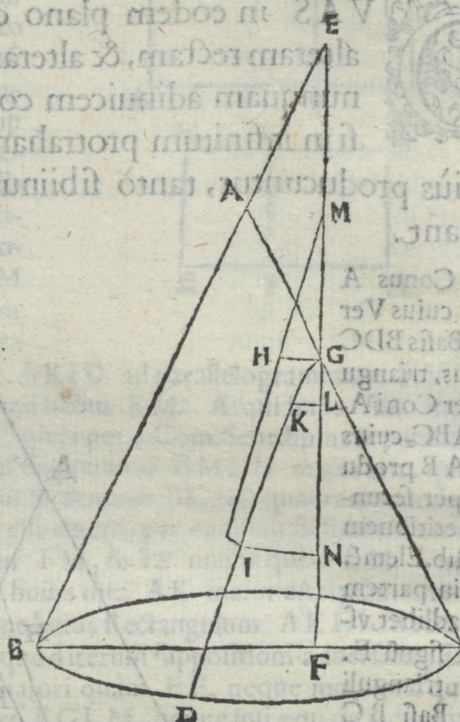
DVAS in eodem plano designare lineas alteram rectam, & alteram curuam, quæ nunquam adinuicem coincidant, etiam si in infinitum protrahantur: & quantò longiùs producuntur, tantò sibiinuicem propiores euadant. Propositio.

Sit Conus ABCD, cuius Vertex A, Basis BDC circulus, triangulum per Coni Axem ABC, cuius latus AB producatur per secundam petitionem primi lib. Elemẽ. Eucl. in partem A quoadlibet, vsque in signũ E. & in trianguli ABC Basi BC accipiatur quodcunq; signum F, à quo ad signũ E per primam pet. eiusdẽ primi recta ducatur linea FE secãs necessariò ratione superiùs dicta latus AC eiusdẽ triãguli in signo G, quæ per 2 prop. lib. 11 Element. Eucl. erit in plano trianguli ABC. Constructio.



H

ABC. & à signo G per 12 prop. eiusdẽ 11 lib. erigatur recta GH ad angulos rectos plano trianguli ABC, quæ per 3 definitionem, eiusdem 11 ad rectos angulos est rectæ lineæ E G F, & per 2 prop. eiusdem erit in vno plano cum recta linea EGF, quod porrò planum secat Conum præter Verticem si vsq; ad Coni Basim protractum esse intelligatur, & erectum est ad planum trianguli ABC per 4 definitionem eiusdem 11. & communis quidẽ sectio horum duorum planorum erit recta linea E F per constructionem, & 3 prop. eiusdem libri 11: cõmunis verò sectio plani EGH, & conicæ superficiei curua quædam est linea Hyperbolica, seu latus Hyperboles per 5 pet. & 21, & 24 definit. huius, & sit GID; quã vtique tangit recta G H in signo G per constructionem, & per secundam partem 28 propositionis primi lib. Elem. Eucl. & per primam partem 32 propositionis primi libri Conicorum Apollonij. Subinde suscipiatur in ipsa GID curua linea quodcunq; signum K, & ab ipso per 11 propositionem lib. 11 Elem. Eucl. ducatur in trianguli ABC planum perpendicularis recta linea KL, quę per



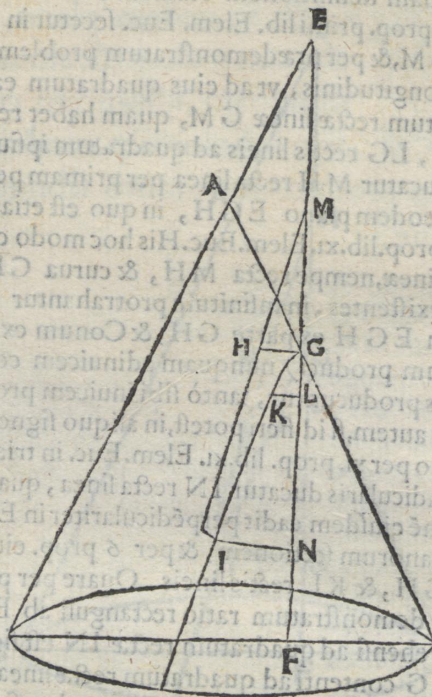
38 prop.

38 prop. eiuſdem lib. 11 cadit in EF communem ſectionem duorum iam dictorum planorum, ipſique EF ad rectos angulos eſt per tertiam definitionem eiuſdem 11. Poſthæc linea recta EG per 10 prop. primi lib. Elem. Euc. ſecetur in duas partes æquales in ſigno M, & per prædemonſtratum problema fiat GH recta linea tantæ longitudinis, vt ad eius quadratum eam habeat rationem quadratum rectæ lineæ GM, quam habet rectangulum contentũ ab EL, LG rectis lineis ad quadratum ipſius LK. Quo demum facto, ducatur MH recta linea per primam pet. eiuſdem primi, quę erit in eodem plano EGH, in quo eſt etiam GID curua linea per 2 prop. lib. xi. Elem. Euc. His hoc modo conſtructis dico quòd ſi duæ lineæ, nempe recta MH, & curua GID in eodem EGH plano exiſtentes, in infinitum protrahantur (intelligendo ſcilicet planum EGH ex parte GH, & Conum ex parte BCD baſis in infinitum produci) nunquam adinuicem coincident: & quantò longiùs producuntur, tantò ſibi inuicem propiores euadent. Coincidāt autem, ſi id fieri poteſt, in aliquo ſigno, verbi gratia in ſigno I, à quo per xi. prop. lib. xi. Elem. Euc. in trianguli ABC planum perpendicularis ducatur IN recta linea, quæ per 38 prop. & 3 definitionē eiuſdem cadit perpēdiculariter in EGF communem duorum planorum ſectionem, & per 6 prop. eiuſdem xi. parallela eſt ipſis GH, & KL rectis lineis. Quare per primum Theorema ſuperiùs demonſtratum ratio rectanguli ab EN, NG rectis lineis comprehenſi ad quadratum rectæ IN eſt ſicut ratio rectanguli ab EL, LG contenti ad quadratum rectæ lineæ LK. Verùm quæ eſt ratio rectanguli ab EL, LG comprehenſi ad quadratum ipſius LK eadem per conſtructionē poſita eſt ratio quadrati rectæ MG ad quadratum rectæ GH. ergo per xi. prop. libri quinti Elem. Euc. eandem habet rationem rectangulum ab EN, NG contentum ad ipſius NI quadratum, quam habet quadratum, quod fit à linea MG ad quadratum, quod à recta GH deſcribitur. At ipſius MG ad ipſius GH quadratum eandem habet rationem, quam habet etiam quadratum ipſius MN ad quadratum ipſius NI (in triangulo enim iuxta ſuppoſitionem rectilineo MNI recta linea NI rectę GH parallela poſita eſt, vnde per 2 partem 29 propoſitionis primi Elem. Euc. duo triangula MGH, & MNI æquiangula ſunt, & ideo per 4 prop. ſexti eorundem habent latera proportionalia, videlicet MG ad GH ſicut MN ad NI. Quamobrem per primam

Determinatio.

Demonſtratio primæ partis.

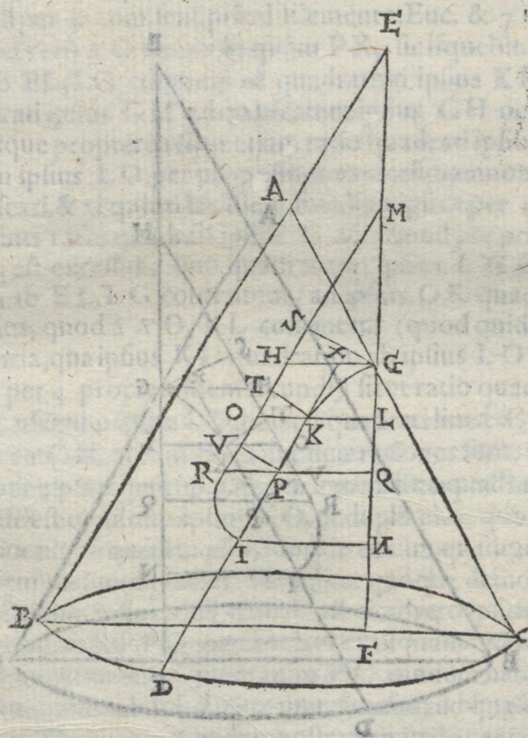
partẽ 22 propositionis eiusdem sexti quadrata etiam harum quatuor linearũ sunt proportionalia) igitur per xi proposi. libri quinti Elem. Eucl. rectãgulum ab EN, NG rectis lineis contentũ ad quadratum lineę NI eãdem habet rationem, quam habet quadratũ lineę MN ad eiusdem NI lineæ quadratum. ergo per primam partem 9 propositionis eiusdem quinti rectangulum ab EN, NG cõprehensum æquale est quadrato rectæ lineæ MN. Verumtamen cũ in constructione recta EG in duas partes æquales in signo M diuisa sit, eique in rectũ adijciatur recta GN, procul dubio per sextam prop. secundi lib. Elem. Euc. rectangulum ab EN, NG comprehensum superabitur à quadrato lineæ MN, quadrato ipsius MG rectæ lineæ. Sed hoc rectangulum eidem quadrato æquale etiam iam ostensum fuit, quod est maximè absurdum. nam fieri non potest vt eædem quantitates inuicem æquales simul, & inæquales sint. Hoc equidem inconueniens sequutum est quoniam suppositum fuit lineam rectam MH, & inflexam GID in eodem plano protractas coincidisse adinuicem in ipso I signo. Similiter autem



idem sequetur incommodum si etiam in quocunque alio signo ipsæ duæ lineæ adinuicem coincidere ponātur. In nullo igitur signo coincident, etiam si in infinitum protractæ fuerint. Patet itaque prima quæsiti nostri pars. descriptæ nanque sunt in eodem E G H plano duæ lineæ recta M H, & inflexa G I D nunquam adinuicem coincidentes quantumcunque protrahantur. Præterea demonstrandum est quòd quantò longiùs producūtur, tantò sibi inuicem propiores fiant. Producatur itaque per secundam petitionem primi lib. Elem. Euc. recta linea L K in continuum, & directum donec coincidat in signo O cum recta linea M H in longùm producta. Necessariò siquidem coincident per quintam pet. primi lib. eorundem. quoniam angulus quidem M L K ex constructione rectus

Conclusio primæ partis.

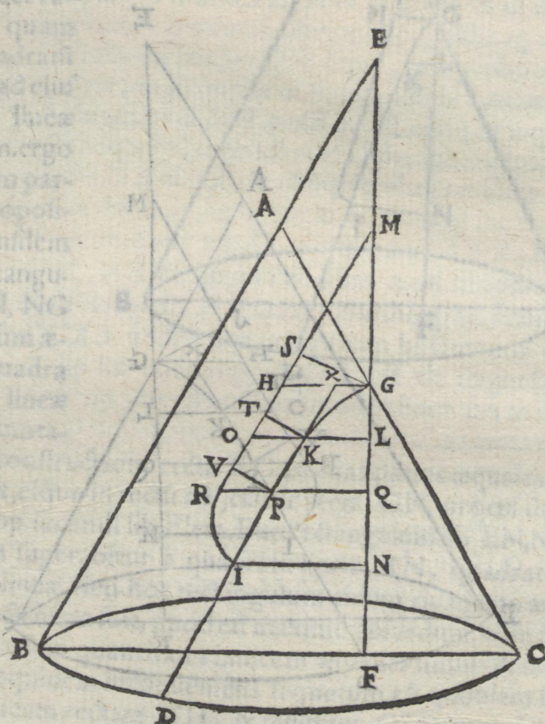
Secūdæ partis constructio.



est,

eſt, angulus verò LM*H* per 32 prop. eiuſdem primi minor eſt recto. Deinde in ipſa *G* I D curua linea infra ſignium *K* ſuſcipiatur quoddam ſignum P, à quo ſuper E *G* F rectam lineam per 12 prop. primi lib. Elem. Euc. perpendicularis P Q ducatur, quæ in partes P producta, occurrat ratione iam dicta in puncto R ipſi M *H* productæ. Poſtea verò quoniã per cõſtructionẽ, & 32 prop. primi lib. Elem. Eucl. *GH*, & KO, & PR rectæ lineæ ad rectã MR perpendiculares non ſunt, à punctis *G* K P ipſius inflexæ lineæ ad rectam lineam M R per 12 prop. eiuſdem primi ducantur perpendiculares *G* S, K T, P V rectæ lineæ, quæ quidem per 19 prop. eiuſdem erunt minimæ diſtantiæ, quibus puncta *G* K P diſtant à recta linea M R. Aio itaque G S diſtantiam eſſe maiorem K T di-

Determõ s:partis

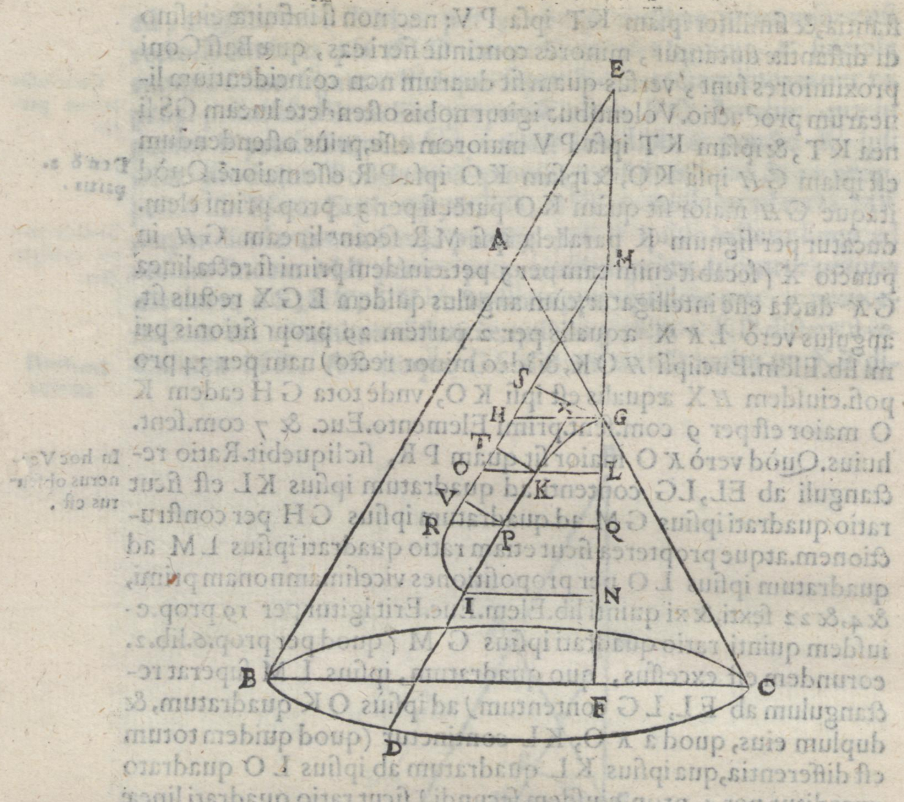


stantia, & similiter ipsam KT ipsa PV: nec non si infinitæ eiusmodi distantiæ ducantur, minores continuè fieri eas, quæ Basi Coni proximiores sunt, versus quam fit duarum non coincidentium linearum productio. Volentibus igitur nobis ostendere lineam GS linea KT, & ipsam KT ipsa PV maiorem esse, priùs ostendendum est ipsam GH ipsa KO, & ipsam KO ipsa PR esse maiorē. Quòd itaque GH maior sit quàm KO patet si per 31 prop. primi elem. ducatur per signum K parallela ipsi MR secans lineam GH in puncto X (secabit enim eam per 5 pet. eiusdem primi si recta linea GK ducta esse intelligatur, cùm angulus quidem LGX rectus sit, angulus verò LKX æqualis per 2 partem 29 propositionis primi lib. Elem. Euc. ipsi HOK, & ideo minor recto) nam per 34 proposi. eiusdem HX æqualis est ipsi KO, vndè tota GH eadem KO maior est per 9 com. sent. primi Elemento. Euc. & 7 com. sent. huius. Quòd verò KO maior sit quàm PR, sic liquebit. Ratio rectanguli ab EL, LG contenti ad quadratum ipsius KL est sicut ratio quadrati ipsius GM ad quadratum ipsius GH per constructionem. atque propterea sicut etiam ratio quadrati ipsius LM ad quadratum ipsius LO per propositiones vicesimamnonam primi, & 4, & 22 sexti, & xi quinti lib. Elem. Euc. Erit igitur per 19 prop. eiusdem quinti ratio quadrati ipsius GM (quod per prop. 6. lib. 2. eorundem est excessus, quo quadratum, ipsius LM superat rectangulum ab EL, LG contentum) ad ipsiùs OK quadratum, & duplum eius, quod à KO, KL continetur (quod quidem totum est differentia, qua ipsius KL quadratum ab ipsius LO quadrato exceditur per 4 prop. eiusdem secundi) sicut ratio quadrati lineæ ML ad quadratum ipsius LO, hoc est quadrati lineæ GM ad quadratum lineæ GH, eædem enim istæ duæ rationes sunt, vt ostésum est. igitur per 2 partem prop. 9. lib. v. Elemen. Euc. quadratum ipsius GH æquale est quadrato ipsius KO, & duplo eius, quod ab OK, KL continetur, si quidem ad vtrunque eorum quadratum ipsius GM eandem rationem habet. Similiter quoque demonstrabitur quòd quadratum ipsius GH æquale est quadrato ipsius PR, & duplo eius, quod ab RP, PQ comprehenditur; nam rectangulum ab EQ, QG contentum ad quadratum PQ eandem habet rationē, quam rectangulum ab EL, LG comprehensum ad quadratum KL per primum Theorema ante demonstratum. vnde per constr. & per xi prop. lib. v. Elem. Euc. rectangulum ab EQ, QG ad quadratum

lineæ

Per 5 a. partis.

In hoc Venerus obscurus est.



lineæ P Q ſe habet vt quadratum ipſius M G ad ipſius G H quadratum, & reliqua vt ſuperiùs.) Ergo per 1 communem ſent. primi eorundem Elem. quadratum ipſius K O vnà cum duplo rectanguli ab O K, K L contenti æquale eſt quadrato ipſius R P, & duplo eius rectanguli, quod ab R P, P Q cōprehenditur. Si itaq; duo rectangula à P R, P Q comprehenſa ita ſibijnuicem indirectum coniungantur vt per primam propoſitionem ſecundi libri Elem. Eucl. vnum ex ipſis confectum rectangulum æquale ſit duplo rectanguli à P Q, P R contenti, necnon quadratum lineæ P R ipſi totali rectangulo ſic adiungatur vt vnum cum ipſo commune latus habeat: idemque ſimiliter de duobus rectangulis ab L K, K O contentis, & quadrato lineæ K O fiat: quoniam per Corollarium

primi

primi præostensi Theorematis P Q maior est quàm K L, erit per secundam partem secundi ante demonstrati Theorematis quadratum lineæ K O maius quadrato lineæ P R. Per 2 igitur Com. Sent. huius recta linea K O maior est quàm ipsa P R. Verumenimuero quandoquidem iam demonstratum est rectam lineam G H recta K O, & ipsam K O ipsa P R maiorem esse: reliquum est vt itidem rectam lineam G S recta K T, & ipsam K T recta P V maiorem ostẽdamus. Quoniam igitur anguli G S H, K T O, P V R per constructionẽ recti sunt, ideoq; per 4 Pet. primi lib. Elemen. Eucl. inuicem æquales: similiter autem anguli G H S, K O T, P R V per constr. & 2 partem 29 prop. primi eorundem Elemen. inter se æquales sunt: ergo per 32 prop. & per 3 Com. Sent. eiusdem primi triangula G H S, K O T, P R V æquiangula sunt. Quare per 4 prop. 6. lib. eorundem quemadmodum se habet G H ad K O, & K O ad P R: ita etiam G S ad K T, & K T ad P V. Sed G H maior est quã K O, & K O quàm P R, vt ostẽsum est. igitur etiã G S quã K T, & K T quàm PV per 9 Com. Sẽt. huius maior erit. Hę autẽ sunt minimę distãtiæ, quibus signa GKP in curua linea existentia distant à recta M R linea, ergo signũ P propiùs est rectæ lineę M R quàm signum K, & signum K quàm signum G. & quoniam idem de quocunq; alio puncto in eadem obliqua linea suscepto eodem modo vsque in infinitum demonstrari potest, perspicuum est quòd quantò ampliùs recta linea M H R, & inflexa, seu Hyperbolica G I D in eodem plano E G H producuntur, eò magis sibiinuicem appropinquant. Atque hoc erat secundum Quæsiti membrum. Quapropter vtraque propositi Problematis pars manifesta, claraque habetur. Duas itaque in eodem plano designauimus lineas alteram rectam, & alteram inflexam, quæ nunquam adinuicem coincidunt etiam si in infinitum protrahantur: & quantò longiùs producuntur, tantò sibiinuicem proximiores euadunt. quod faciundum erat.

Hoc obscurè ex Vernerі verbis haberi potest.

In hac parte deficit Vernerus.

Conclusio secũdæ partis.

Conclusio vniuersalis.

Corollarium.

Ex demonstratione secundæ partis huius Problematis emergit nobis Corollarium quòd quotiescunque Hyperbo-

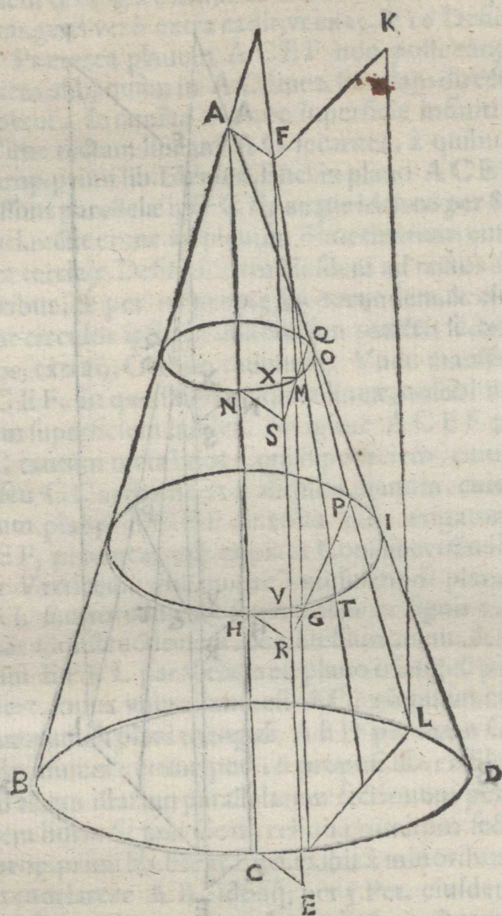
le cum recta linea ipsi non coincidente in eodem plano descriptæ fuerint, quadratum ipsius KO, & duplum eius, quod ab OK, KL continetur æqualia sunt quadrato ipsius PR, & duplo rectanguli ab RP, PQ comprehensi; idemq; verum est in omnibus lineis ordinatè ductis intra Hyperbolem, atque ad non coincidentem vsque rectam lineam productis.

Secunda Eiusdem Problematis Demonstratio.

Cōstructio. Sit Conus ABCD, cuius Vertex quidem A, Basis verò, BCD circulus, & à puncto C per medium semicircunferentiam BCD diuidente ad Verticem A ducatur recta linea CA, quæ tota erit in conica superficie per primam petitionem huius. & ab eodem puncto C per 12 prop. 11 lib. Elemen. Eucl. recta erigatur linea CE ad rectos angulos plano trianguli per axem habentis latus AC. quæ quidem CE linea per 3 definit. eiusdem 11 erit ad rectos angulos in puncto C tum dimetienti circuli BCD, tum ipsi AC rectæ lineę. Quare per Corollarium 16 prop. lib. tertij Elem. Eucl. eadem AC recta linea erit tangens circulum BCD in puncto C. Duæ igitur lineæ CA, & CE in eodem sunt plano per 2 prop. lib. 11 eorundem, quod quidem planum necessariò tangit conicam superficiem à Vertice vsq; ad Basim in recta linea AC. Ducatur itaque per punctum A recta linea AF parallela, & æqualis rectæ CE per 31, & 3 prop. primi lib. Elem. Eucl. & ducatur per primam Pet. eiusdem EF, quæ etiam per 33 prop. eiusdem primi rectæ lineæ AC parallela, & æqualis erit. factum est ergo ACEF parallelogrammum rectangulum planum tangens superficiem conicam in linea AC. Quòd autem hoc planum hincinde productum, nullibi nisi in linea AC conicam superficiem tangere possit, facilè conuincitur. Si enim tangeret ipsam in quodam alio pun-

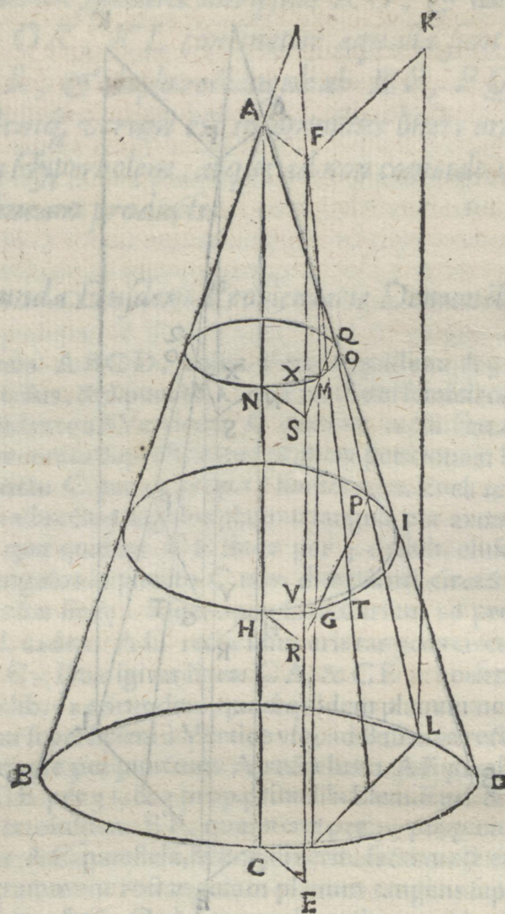
Indirecta ostensio. cto, vt in G; intelligatur planum parallelum basi secans Conum per signum G, cuius plani, & conicæ superficiei communis sectio erit circulus per 4 pet. huius, quippequi circulus sit HGI secans lineam AC in signo H. Et quoniam planum circuli HGI secat

planum



planum A C E F in signis G H ipsius contactus, erit per 3 prop. lib. 11 Elemen. Eucl. communis eorum sectio recta linea G H, quæ cum duo puncta connectat in circuli circunferentia existentia, seu in conica superficie præter Coni Fastigium iacentia, cadet intra circulum ipsum, atque intra Conum per 2 prop. 3 lib. Elem. Eucl.

In hoc probando deficit Cardanus, & Paralogismū cōmittit.



ſeu per 2 Pet.huius. Cùm autẽ ipſa linea G H ſit in plano ACEF, iuxta quam ſecatur à circuli plano, neceſſariò planũ etiam ACEF caderet intra Conum, ſecaretq; ipſum in linea A C per 15 Definitionem huius, quod eſt contra Cõſtructionem, quandoquidem planum A C E F poſitum fuit tangẽs ſuperficiem Coni in linea A C.

Non

Non potest enim idem planum in eadem recta linea eandem conicam superficiem & tangere simul, & secare. Secans siquidem intra Conum, tangens verò extra cadit, vt ex 15, & 16 Definitionibus huius patet. Præterea planum ACEF non posse tangere conicam superficiem alibi quàm in AC linea, sic etiam directa demonstratione habetur. In conica nanque superficie infiniti circuli excogitari possunt rectam lineam AC secantes, à quibus sectionibus per 31 prop. primi lib. Elemen. Eucl. in plano ACEF rectæ lineæ duci possunt parallelæ ipsi CE, atque idcirco per 8 propo. 11 lib. Elem. Eucl. rectæ erunt ad planum dimetientium eorum circulorum, & per tertiam Definitionem eiusdem ad rectos angulos ipsis dimetientibus, & per 16 prop. 3 lib. eorundem, & eius corollarium tangent circulos ipsos in illis tantùm punctis sectionum totæ extra circulos, extraq; Conum cadentes. Vnde manifestum est ꝙ planum ACEF, in quo sunt iam dictæ lineæ, nullibi nisi in linea AC conicam superficiem tanget. Sit igitur ACEF planum tangens in AC tantùm recta linea Coni superficiem, cuius plani latitudo AF, seu CE tanta sit, vt si aliquod planum, cuius communis sectio cum plano ACEF sit recta EF, erigatur super planum ACEF, producaturq; ex parte Coni, necessariò secet Conum præter Verticem. Sit itaque huiuscemodi planum productum EFKL secans conicam superficiem in signis G, & M. & quoniam per Constructionem, & 4 Definitionem, & 14 prop. 11 Elem. planum EFKL parallelum est plano trianguli per axem Coni illius scilicet, cuius vnum latus est AC; cõmunes etiã duorum istorum planorum, & plani trianguli ABD per axem Coni sectiones parallelæ inuicem erunt per 16 proposi. lib. 11 Elemen. Eucl. Quare cùm altera istarum parallelarum sectionum per 10, & 18 Definitionem huius sit axis Coni; reliqua nimirum sectio per 29, & 5, & 32 prop. primi lib. Elem. Eucl. exibit à minoribus duobus rectis angulis cum latere AB, ideoq; per 5 Pet. eiusdem primi occurret ipsi AB lateri in partem A producto. Quamobrem per 5 Pet. & 21 Definitionem huius linea GM in superficie conica iacens inflexa, mista, & Hyperbolica linea est, seu latus Hyperboles per 24 Definitionem huius. Constatque ex Constructione ipsam GM curuam lineam in eodem esse plano EFKL cum recta EF. Dico itaque hasce duas lineas, inflexam scilicet MG, & rectam EF in eodem EFKL plano continuę productas (quod planum intelligatur

Directa ostẽsio.

In hoc probando deficit Peletarius, & quod dam falsum dicit.

Determinatio primæ partis.

intelligatur in infinitum cum tota Coni superficie Basim versus extendi) nunquam sibi inuicem occurrere. Si enim sibi occurrant, aut hoc fiet in linea A C, & ita A C, & E F parallelæ coincident, quod est inconueniens: aut præter A C lineam, & ita cum M G quidem inflexa linea semper sit in superficie Coni, recta verò E F

Demonstratio primæ partis.

maneat

maneat semper in plano ACEF; necessariò planum ACEF tangeret Conum alibi quàm in linea AC, quod fieri nō posse iam demonstrauimus. Nunquam ergo GM, & EF lineæ coincident etiam si in infinitum protrahantur. Et hæc est prima Problematis pars. Dico modò quòd istæ duæ lineæ non coincidentes quo magis à culmine Coni elongantur, eò magis inuicem proximæ fiunt. & satis sit in duobus tantùm lineæ inflexæ punctis vtpote G, & M hoc demonstrare. quòd scilicet in pūcto G proximior sit inflexa GM linea rectæ EF, quàm in puncto M. Quandoquidem eodem modo in omnibus etiam alijs ipsius curuæ lineæ punctis idem ostendetur. Capiatur itaque circulus NMO parallelus basi BCD, & priori circulo HGI. & ducantur per primam Pet. primi lib. Elem. Eucl. in planis circulorum NMO, & HGI iuxta communes eorum, & plani EFKL sectiones rectæ lineæ GP, & MQ. & producantur in partes G, & M per 2 pet. eiusdem quousque secent lineam EF ipsa quidem PG in signo R, ipsa verò QM in signo S. & erunt per 16 prop. lib. 11 Elem. Eucl. ipsæ PR, & QS inuicem parallelæ. Similiter per eandem primam Pet. ducantur in plano ACEF rectæ lineæ HR, & NS. quæ quidem erunt etiam in planis eorundem circulorum per 2 prop. eiusdem 11 Elementorū bis sumptā; cū lineis enim PR, & QS seinuicē secant. Igitur per 16 propositionem eiusdē 11 sibi inuicē, & ipsi CE parallelæ erunt. necnon circulos HGI, & NMO tangent rationibus superiùs dictis. At etiam HN, & RS ex Constructione parallelę sunt. ergo per 34 prop. primi lib. eorundem element. HR, & NS inuicem sunt æquales. & quoniam contingunt circulos HGI, NMO; erit per 36 prop. lib. 3. eorundē quadratū ipsius NS æquale parallelogrāmo rectāgulo, qđ fit ex multiplicatione ipsius QS in SM: & quadratum ipsius HR æquale ei, quod fit ex PR in RG. Quadrata autē ipsarum HR, & NS æqualia sunt per Constructionem, & per 2 Com. Sent. huius. Rectangulum igitur, quod fit ex PR in RG æquale est rectangulo, quod fit ex QS in SM per primam Com. Senten. primi lib. Elemen. Eucl. bis sumptam. Quare per secundam partem 16 propositionis lib. 6 eorundem Elementorum ratio rectæ lineæ PR ad rectam QS est sicut ratio lineæ MS ad GR. sed PR maior est quàm QS, ergo MS etiam maior est quàm GR per 9 Com. Sent. huius. Quòd autem PR maior sit quàm QS, sic probetur. Si in Plano EFKL per

Conclusio primæ partis.

Determinatio secundæ partis.

Constructio secundæ partis.

In hoc deficit Cardanus, & falsū dicit.

Demonstratio secundæ partis.

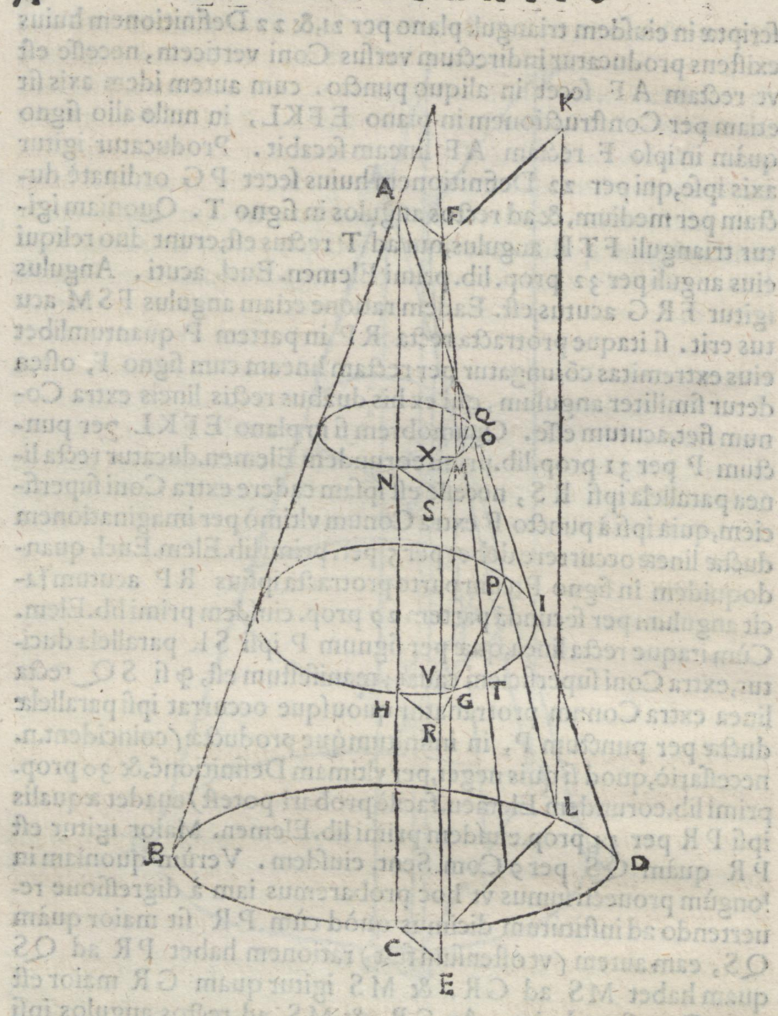
signum

Hoc malè
ptat. Car.

ſignum P ducatur per 31 prop. primi lib. Elemen. Eucl. parallela ipſi E F, dubio procul extra ſignum Q cadet. quod ſic deducatur. Recta linea A F per Conſtruct. & per 2 prop. lib. 11 eorundem Elemento. eſt tum in plano A C E F, tum in plano trianguli A B D per Axem Coni. Si igitur Axis Hiperboles iam de-

ſcriptæ

ſcriptæ in eiuſdem trianguli plano per 21,& 22 Definitionem huius exiſtens producatur indirectum verſus Coni verticem, neceſſe eſt vt rectam AF ſecet in aliquo puncto. cum autem idem axis ſit etiam per Conſtructionem in plano EFKL, in nullo alio ſigno quàm in ipſo F rectam AF lineam ſecabit. Producatur igitur axis ipſe, qui per 22 Definitionem huius ſecet PG ordinatè ductam per medium, & ad rectos angulos in ſigno T. Quoniam igitur trianguli FTR angulus, qui ad T rectus eſt; erunt duo reliqui eius anguli per 32 prop. lib. primi Elemen. Eucl. acuti. Angulus igitur FRG acutus eſt. Eadem ratione etiam angulus FSM acutus erit. ſi itaque protracta recta RP in partem P quantumlibet eius extremitas cõiungatur per rectam lineam cum ſigno F, oſtendetur ſimiliter angulum, qui ex his duabus rectis lineis extra Conum fiet, acutum eſſe. Quamobrem ſi in plano EFKL per punctum P per 31 prop. lib. primi eorundem Elemen. ducatur recta linea parallela ipſi RS, neceſſe eſt ipſam cadere extra Coni ſuperficiem, quia ipſi à puncto F extra Conum vltimò per imaginationem ductæ lineæ occurrere debet per 5 pet. primi lib. Elem. Eucl. quandoquidem in ſigno P cum parte protracta ipſius RP acutum facit angulum per ſecundã partem 29 prop. eiuſdem primi lib. Elem. Cùm itaque recta linea, quæ per ſignum P ipſi SR parallela ducitur, extra Coni ſuperficiem cadat; manifeſtum eſt, ꝙ ſi SQ recta linea extra Conum protrahatur quouſque occurrat ipſi parallelæ ductæ per punctum P, in infinitumque productæ (coincident. n. neceſſariò, quod ſi quis neget, per vltimam Definitionẽ, & 30 prop. primi lib. eorundem Elemen. facilè probari poteſt) euadet æqualis ipſi PR per 34 prop. eiuſdem primi lib. Elemen. Maior igitur eſt PR quàm QS per 9 Com. Sent. eiuſdem. Verùm quoniam in longùm prouecti ſumus vt hoc probaremus iam à digreſſione reuertendo ad inſtitutum dicimus quòd cùm PR ſit maior quàm QS, eam autem (vt oſtenſum fuit) rationem habet PR ad QS quam habet MS ad GR. & MS igitur quam GR maior eſt per 9 Com. Sent. huius. At GR, & MS ad rectos angulos ipſi EF minimè ſunt; cùm anguli, qui ad R, & S acuti iam oſtẽſi ſint. atq; propterea ipſæ MS, GR non ſunt breuiſſima interualla, quibus G, & M ſigna inflexæ lineæ à recta EF diſtare poſſint: eò quòd ab eiſdem punctis ad ipſam EF rectam lineam perpendiculares duci poſſunt, quæ per 19 prop. primi lib. Elem. Eucl. ipſis MS, GR



breuiores erunt, imo breuissimæ omnium, quæ ab eisdem signis ad rectam E F duci possint. Omnes enim aliæ ab eisdem punctis ex quauis parte ductæ perpendicularibus ipsis maiores sunt per eandem 19 prop. cùm maiorem angulum, scilicet rectum subtendant. Nam vna tantùm perpendicularis ab eodem puncto ad eandem re-

ctam

ctam lineam in eodem plano duci potest, quod patet ex 17 prop. primi lib. Elemen. Eucl. Quæ cùm ita se habeant, ducantur per 12 prop. primi lib. eorundem Elemen. à signis G M ad lineam rectam E F in plano E F K L perpendiculares G V, & M X: & erunt anguli G V R, & M X S per 4 pet. eiusdem primi lib. Elem. Eucl. æquales, quia recti per 10 Definitionem eiusdem sunt. Quoniam autem G R, & M S parallelæ ex Cõstructione sunt: anguli etiam G R V, & M S X per secundam partem 29 prop. primi lib. eorundem Elem. sunt æquales. ergo per 32 prop. & per 3 Com. Senten. eiusdem triangula G R V, & M S X æquiangula sunt. atque idcirco per 4 prop. sexti lib. eorundem Elemen. ratio ipsius M X ad G V est sicut ratio ipsius M S ad G R. Sed M S maior est quàm G R (vt probatũ fuit) ergo & M X quàm G V per 9 Com. Sent. huius maior est. sunt autem M X, & G V minimæ distantiæ, quibus signa G M Hyperbolicę lineę à recta linea E F distare possint: igitur signum G est proximius rectæ E F quàm signum M. quod quidem erat secundò demonstrandum. Descriptę sunt igitur in eodem plano duæ lineæ altera recta, & altera inflexa, & reliqua vt in propositione. Quod fecisse oportuit.

Cõclusio secũdæ partis.

Conclusio vniuersalis.

Corollarium.

Hinc manifestum est quòd si planum E F K L ex parte lineæ E F producatur, in ipsóq; per 31 propositionem primi lib. Elemen. Eucl. vna recta linea parallela ipsi E F ducatur, quæ duæ parallelæ rectæ lineæ distent ab inuicem quodam determinato spatio, gratia exempli mille Stadijs: erunt designatæ in eodem plano duæ lineæ altera recta, vltimò scilicet ducta, & altera curua, nempe Hyperbolica ipsa, quæ cum eodem plano, & superficie Coni in infinitum productæ, semper sibi inuicem magis proximabunt; nunquam tamen mille Stadijs sibi proximiores erunt. alioqui linea G M inflexa rectæ E F occurret,

curret, quod fieri non posse iam demonstratum fuit. Hoc autem Corollarium maximè admirandum est.

Ante quam ad tertiam instituti Problematis demonstrationem accedamus quoddam Theorema nobis prædemonstrandum est, in quo tota vis illius demonstrationis consistere videtur. Quidam enim tanquam manifestum hoc supponentes demonstrare se credidere, cùm tamen nugentur. in Geometricis namque demonstrationibus nil tanquam manifestum assumendum est, quin ipsum vel ab alijs satissuperque demõstratum, vel ab omnibus tanquam principium nulla demonstratione indigens concessum, receptumque sit. Theorema igitur, quod præmittimus, sit huiusmodi.

Lemma, seu Assumptum sequentis tertiæ Demonstrationis.

Propositio.

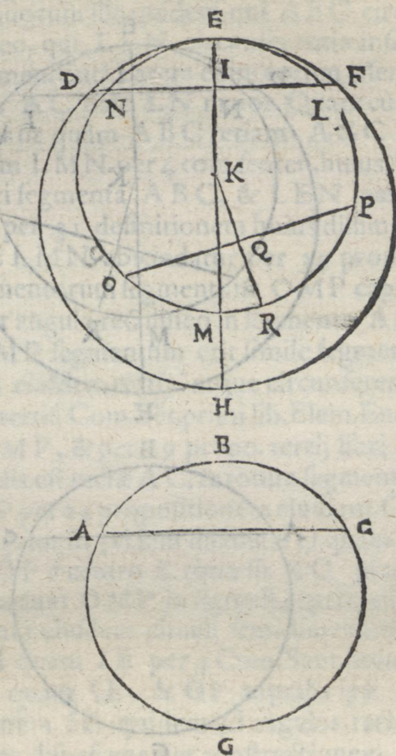


EQVALES rectæ lineæ in circulis inæqualibus inæquales cùm maiorum, tum minorum Segmẽtorum auferunt circunferentias, in minoribus nempe Segmentis maiorem quidem à minori, minorem verò à maiori: in maioribus autem Segmentis maiorem quidem à maiori, minorem verò à minori circulo circunferentiam.

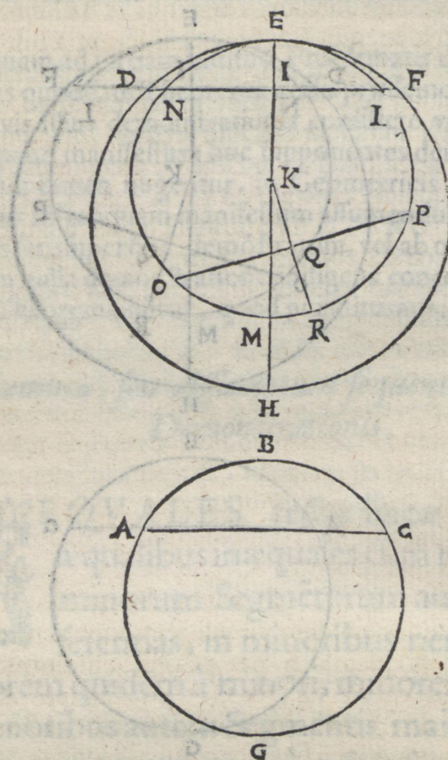
Expositio. Sint duo inæquales circuli ABC quidem minor, DEF verò maior, in quibus duæ rectæ lineæ AC, & DF inuicem æquales vnà cum circulorum circunferentijs minora quidem Segmenta circulorum contineant ABC, & DEF: maiora verò AGC, DHF.

Determinatio. Dico quòd in minoribus quidem Segmentis circunferentia ABC circuli minoris est maior quam circunferentia DEF circuli maioris: in maioribus autem Segmentis aio circunferentiam DHF maioris circuli circunferentia AGC minoris circuli maiorem esse.

Constructio primæ partis. Diuidatur itaque recta linea DF per decimam prop.



prop.primi lib. Elem. Eucl. in duas partes æquales in signo I, à quo erigatur ipsi DF ad angulos rectos per 11 propo. eiusdẽ recta linea, quæ vtrinque per secundam petitionẽ eiusdẽ producta secabit circunferentiam DEF, verbi gratia in signo E, & transibit per centrũ circuli DEF per Corollariũ primæ propositionis tertij libri Elem. Eucl. & secabit ex altera parte eiusdẽ circuli circunferentiam, vtpotè in signo H. Deinde quoniã semidimetiens circuli DEF est maior semidimetiente circuli ABC per suppositionem, & per 30 Definitionẽ huius: resecetur per 3 prop. primi lib. Elem. Eucl. à semidimetiente maiore semidimetienti minori æqualis recta linea EK. & centro K, interuallo autem KE describatur per 3 pet. primi lib. Elem. Eucl. circulus ELMN, qui necessariò tanget intrinsecùs circulum DEF, & nullibi nisi in signo E per 11, & 13 prop. tertij lib. Elem. Eucl. Quamobrem secabit



bit eiusdem E L M N circuli circunferentiam linea recta D F in duobus signis, vt puta L N. Igitur recta linea L N est minor per 9 Com. Sent. primi lib. eorundem Elemen. quàm D F, hoc est quàm A C. Atque idcirco remotior est à centro circuli E L M N quàm recta linea ipsi A C æqualis per conuersam quintędecimæ prop. lib. tertij Elem. Eucl. minorque est circunferentia L E N quàm A B C per vltimam propositionem lib. sexti Elem. Eucl. quia

si à cen-

si à centris circulorum ABCG,ELMN ad AC, LN signare-ctæ lineæ ductæ intelligantur; erunt anguli ad centra circulorum æqualium constituti, quorum ille quidem, qui ABC circunferentiæ insistit, maior erit eo, qui LEN circunferentiæ insisteret per 25 prop. primi lib. Elemen. Eucl. Latera enim eorum essent æqualia alterum alteri, & basis AC base LN maior. Quare cùm circunferentia LEN minor sit quàm ABC, etiam AGC circunferentia minor erit quàm LMN per 4 com. senten. huius. Vnde per eandem vltimam sexti segmenta ABC, & LEN inæquales capiunt angulos. Ergo per 31 definitionem huius dissimilia sunt. A dato igitur circulo ELMN abscindatur per 34 propositionem 3 lib. eorundem Elementorum segmentum OMP capiens angulum æqualem cuilibet angulo rectilineo in segmento ABC existẽti. quod quidem OMP segmentum erit simile segmento ABC per 10 definitionem eiusdem tertij. atque circunferentia ABC per 26 prop. tertij, & tertiã Com. Sẽt. primi lib. Elem. Eucl. est æqualis circunferentiæ OMP, & per 29 propo. tertij libri eorundem OP recta linea æqualis est rectæ AC, & totum segmentum ABC toti segmento OMP per 24 propositionem eiusdem. Cùm autem OP cẽtro *K* propinquior sit (vt iam dictum est) quàm LN, minor est distantia ipsius OP à centro K (quæ sit KQ producta quousq; secet circunferentiam OMP in signo R) quàm distantia KI. Quoniam verò omnes eiusdem circuli semidimetientes æquales sunt, QR maior est quàm IE per 4 Com. Sent. huius. Cùm igitur QR maior sit, quàm IE, & OP æqualis ipsi AC, hoc est ipsi DF: Est autem IE quidem ad angulos rectos ipsi DF, eamque per medium dispescens per constructionem, QR verò similiter ad rectos angulos ipsi OP, & per medium ipsam secans per 4 definitionem, & secundam partem tertiæ propositionis tertij libri Elementorum Eucl. necesse est si super recta linea DF in partes E simile, & ęquale segmentum ipsi ORP constituatur, vt eius circunferentia cadat extra DEF circunferentiam segmenti circuli maioris: alioquin QR æqualis esset ipsi IE, vel minor quàm ipsa, cùm tamen maior esse ostensa iam sit. Verùm si circunferentia ipsi ORP, vel ABC æqualis cadit extra circunferentiam DEF, perspicuum est ipsam ORP, seu ABC ipsa DEF esse maiorem per definitionem lineæ rectæ. Quandoquidem recta linea definitur minima omnium eosdem cum ipsa terminos habentium

Demonstratio primæ partis.

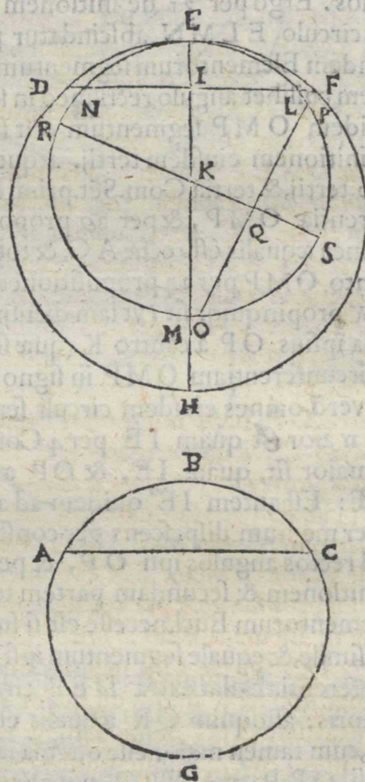
bentium linearum: vel à puncto in punctum breuissima extensio: vel quæ ex æquo inter signa sua sita est. ex his enim rectæ lineæ definitionibus clarum est quòd omnes curuæ lineæ eosdem cum recta terminos possidentes, & ad easdem partes constitutæ inter se sunt inæquales: & remotiores quidem à recta proximioribus semper maiores, vt sensui conspicuũ, ab omnibusq; concessum est. Patet igitur prima huiusce Theorematis pars. Secunda verò sic constabit. Sint duo circuli inæquales minor quidem ABC, maior verò DEF: & in ipsis duę rectæ lineæ AC, & DF inuicem æquales continentes cũ circunferentijs segmenta minora quidem ABC, DEF: maiora verò AGC, DHF. Dico quod DHF circunferentia maior est quàm AGC. Diuidatur igitur vt superius recta DF in duas partes ęquales ĩ signo I, & erigatur IE ad angulos rectos, & produ-

Conclusio primæ partis

Expositio secũdæ partis.

Determinatio secundæ partis.

Cõstructio.



producatur vtrinque vt transeat per centrum, & secet circunferentiam circuli in signis E H. Deinde circa cẽtrum K circulus æqualis ipsi A B C eo modo, quo superiùs, describatur tangens circulum maiorem in signo E, & secans rectam quidem D F in signis L N, dimetientem verò E H in signo M. Et quoniam his ita iacentibus superiùs ostensum est circunferentiam A B C esse maiorem circunferentia L E N, inæquales igitur angulos capiunt per vltimam propositionem sexti lib. Elem. Eucl. Segmenta A G C, & L M N, & ideo dissimilia sunt per 31 Definitionem huius. Abscindatur itaque à circulo E L M N per 34 prop. tertij lib. Elem. Eucl. Segmentum O N E P suscipiens angulum æqualem cuiuis angulo in Segmento A G C existenti. quod vtique Segmentum erit simile, & æquale A G C Segmento rationibus superiùs dictis. Potest autem aliter etiam abscindi Segmento A G C simile, & æquale Segmentum O N E P, scilicet accommodando per primam propositionem quarti libri Elemen. Eucl. in circulo E L M N rectam P O æqualem rectæ A C. erit enim per 28 prop. tertij lib. Elem. Eucl. circunferentia A B C æqualis circunferentiæ O P. quare per 26 prop. eiusdem tertij lib. Segmenta A G C, & O N P suscipiunt angulos æquales. vnde per 10 Definitionem eiusdem similia sunt. cùm autem sint super æqualibus rectis lineis constituta proculdubio per 24 prop. eiusdem æqualia quoque erunt. Hoc itaq; facto recta linea O P, basis nempe Segmenti O E P secetur per medium in signo Q, à quo erigatur ipsi O P ad rectos angulos recta linea, quæ protracta vtrinque transibit per centrum K, per Corollarium primæ propositionis tertij lib. Elem. Eucl. secabitque circunferentiam circuli minoris in signis R S. His ita constructis quoniam O P maior est quàm L N (vt superiùs fuit ostensum) ergo centro K est propinquior per conuersam 15 propositionis tertij lib. eorundem Elementorum. Igitur Q K distantia minor est quàm distantia I K. Quare Q S maior est quàm I E per 4 Com. Sent. huius: nec non Q R minor est quàm I M per eandem: Vnde multò minor quàm I H. Si igitur super recta linea D F in partem H constitutum fuerit Segmentum O N P, necesse est eius circunferentiam cadere intra circunferentiam D H F: alioquin I H esset æqualis ipsi Q R, aut minor quàm ipsa, quod est contra ea, quæ ostensa sunt. Quapropter ex Definitionibus rectæ lineæ superiùs dictis patet circunferentiam D H F esse maiorem circunfe-

Demonstratio secundæ partis.

Cõclusio secundæ partis. rentia ONP, seu quauis alia, quæ sit ipsi AGC æqualis. Atque hoc erat secundò demonstrandum. Patet autem hæc secũda pars etiam ex sexta Communi Sententia huius. Aequales igitur rectæ

Conclusio vniuersalis. lineæ in circulis inæqualibus, & reliqua vt in propositione. Quod erat demonstrandum, atque præassumendum.

Corollarium.

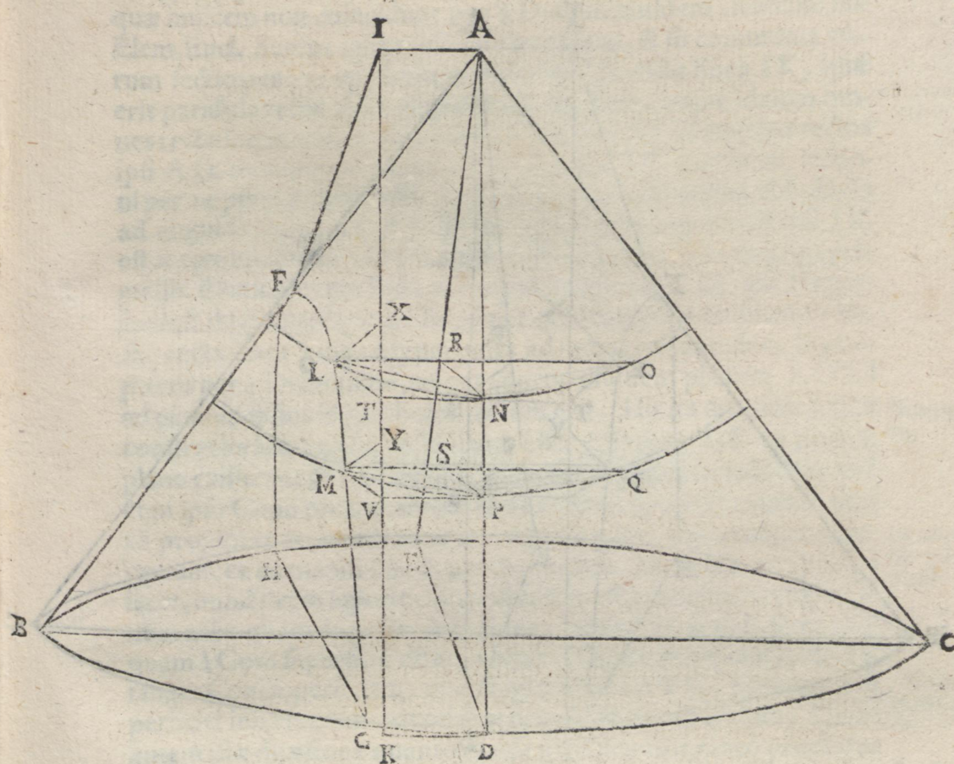
Ex demonstratione huius Theorematis constat quòd in minoribus inæqualium circulorum Segmentis æquales bases habentibus, partes dimetientium ipsorum circulorum, quæ tum Segmenta ipsa, tum eorum bases per medium diuidunt, inæquales sunt: maior quidem minoris dimetientis, minor verò maioris. In maioribus autem inæqualium circulorum Segmentis præfatæ dimetientium partes è contrario sunt inæquales: maioris quidem dimetientis maior, minoris verò, minor.

Patuit enim in prima configuratione ipsam QR esse maiorem ipsa IE, pariterque in secunda descriptione ipsam QR ipsa IH minorem esse. Quod sanè Corollarium & pulcrum est, & sequenti Demonstrationi maximè opitulaturum. Hisce autem præmissis modò ad institutum reuertamur.



EIVSDEM PRAECIPVI PROBLEMATIS DEMONSTRATIO TERTIA.

Expositio, & Cõstructio. IT igitur Conus ABCD, cuius vertex A, basis verò BDCE circulus, & triangulũ per axem ADE, cuius basis recta linea DE, & aliud per axem triangulum ABC. Sit rursum aliud quoddam planum GFH plano trianguli ADE parallelum, conum ipsum sub inflexa GFH linea inæqualiter secans, quæ quidem inflexa linea per 21 Definitionem huius vnà cum recta GH continet Hyper-



Hyperbolem sectionē conicam. Quandoquidem si per signum F (quod erit vertex ipsius Hyperbolis) exire intelligatur communis sectio plani trianguli ABC, & plani GFH, coincidet per quintam petitionem primi libri Elementorum Eucl. cum latere AC ipsius trianguli extra Coni Verticem producto. Quoniam per Constructionem,& 16 prop. 11 lib. Elemen. Eucl. ipsa communis sectio axi Coni parallela est, & ideo si protracta intelligatur recta BC, faciet per 12 Definitionem huius,& per 29,& 32 prop.primi lib.Elem.Eucl.cum iam dicta exeunte,& AC rectis lineis intra Conum duos angulos duobus rectis minores. Huius itaq; Hyperbo-

lis planum intelligatur directè, & interminatè protractum ad partes FG. Subinde quoddam aliud planum ſuperficiei Coni ſic applicetur vt ipſam tangat in tota recta AD linea, planoq́ue trianguli ADE rectum ſit. hoc autem fiat quemadmodum in ſuperiori Conſtructione. Coëxtenſo igitur hoc plano verſus Hyperbolem, ſecabit eius planum: Cùm enim ſecet planum trianguli ADE parallelum plano GFH, neceſſariò & ipſum GFH ſecabit, aliter neque etiam ipſum ADE ſecaret. quoniam plana, quę eidem plano ſunt parallela; & inter ſe parallela ſunt (vt rectè demonſtrant Campanus in 16 prop. lib. 11 Elemen. Eucl. & Vitellio in

Hoc nõ probat Oronsius.

In 14 prop. primi libri suæ Perspectiuę.) Parallela autem plana sunt, quæ inuicem non coincidunt per 8 Definit. eiusdem vndecimi lib. Elem. Eucl. Secent igitur sese duo hæc plana, & sit communis eorum sectio per 3 prop. eiusdem vndecimi lib. recta linea IK, quæ erit parallela rectæ AD per 16 prop. eiusdem. atque idcirco omnes rectæ lineæ, quæ in plano ADKI ducentur ad angulos rectos ipsi AD, erunt etiam ad rectos angulos ipsi IK communi sectioni per 29 prop. primi lib. Elem. Eucl. Quamobrem recta AI ducta ad angulos rectos ipsi ADE plano, ad rectos angulos est ipsi IK. est autem etiam per 3 Definitionem, & 16 prop. 11, & 29 prop. primi lib. Elementorum Eucl. ad angulos rectos ipsi IF axi Hyperbolis, si ducta intelligatur. Ergo per quartam prop. eiusdem 11 lib. AI recta linea plano Hyperboles ad rectos erit angulos. & propterea per 4 Definitionē, vel per 18 prop. eiusdem planum ADKI ad planum ipsius Hyperboles rectum erit. His ita expositis, atque constructis Dico quòd recta linea IK, & inflexa GF in eodem plano existentes nunquam sibi occurrent, etiam si in infinitum vnà cum ipso Cono protrahantur: & quantò magis producuntur, tantò propiores erunt adinuicem. Quòd igitur sibi nunquam occurrant, ex eo manifestū est, ꝙ recta quidem IK in plano ADKI iacet, quod (vt in superioribus ostensum est) nunquam tanget Conum alibi quàm in recta AD linea: Inflexa verò GF linea nusquam à Coni superficie dimouebitur. Quare nunquam recta IK tanget Coni superficiem: neque igitur lineam FG, ipsi conicæ superficiei inhærentem. quod erat primò demonstrandum. Quòd autem istæ duæ lineæ quantò magis producuntur, tantò propiores adinuicem sint dilucidè ostendetur, paucis priùs constructis. Suscipiantur itaque in ipsa inflexa linea duo quælibet signa LM, per quæ transeant duo circuli sibi inuicem, & Basi Coni paralleli, quorum circunferentiæ in superficie conica ab eorundem planis Conum secantibus designatæ sint LNO quidem minoris, culminique propinquioris: MPQ verò, maioris, basique proximioris. Et comprehensis inter lineas AD, & FG eorundem circulorum circunferentijs LN, & MP, fiant eis æquales NO, & PQ circunferentiæ; quod fiet per primam petitionem bis sumptam, & 23 propositionem primi libri Elementorum Euclidis, seu per eandem primam petitionem, & primam propositionem quarti eorundem. Deinde per eandem primam petitionem

Determinatio.

Demonstratio primæ partis.

Conclusio primæ partis.

Constructio secundæ partis.

ducantur rectæ lineæ L O, M Q, quæ per 3 Com.Sent.primi, & 27, & 29 propositionem tertij, & 4 prop. & decimam Definitionem primi libri Element. Eucl. in duas æquales partes,& ad rectos diuidentur angulos à communibus sectionibus planorum vtriusq; circuli,& plani trianguli A D E. Sit igitur secta ipsa L O in puncto R, ipsa verò M Q in puncto S. & ducantur communes sectiones N R, & P S, quæ erunt parallelæ per 16 prop. 11 lib.Elemen. Eucl. Ducantur præterea per 31 prop. primi lib. eorundem Elem. per puncta N P ipsis R L, S M parallelæ rectæ lineæ N T, P V. quæ productæ in plano A D K I secabunt I K rectam de necessitate

te per 30 propositionem,& vltimam Definitionem primi libri eorundem Element. secent ipsam in punctis T V. & ducantur L T, & M V rectæ lineæ, quæ per 16 prop. libri 11 eorundem Element. erunt parallelæ ipsis R N, & S P. His ita constructis quoniam per Cõstructionem, & 29, & 34 prop. primi lib. eorundem Elemen. parallelogramma rectangula sunt ipsa L R N T, & M S P V, & latera ex opposito habent æqualia: igitur L T ipsi R N, & M V ipsi S P æquales sunt. Sed R N maior est quàm S P per Corollarium præostesi Lemmatis. Et L T igitur ipsa M V maior est per 14 propositionem quinti libri Element. Eucl. Si itaque L T, & M V ad rectos essent angulos ipsi I K, haberemus intentum. Quoniam autem non sunt, angulis I T L, & I V M acutis existentibus (vt patet per Constructionem, & octauam propositionem, & tertiam Definitionem 11, & 29, & 32 prop. primi libri Elem. Eucl. si I F axis Hyperbolis, & ipsæ T L, V M protractæ intelligantur) ducantur per 12 prop. eiusdem primi lib. Element. à punctis L M ad rectam I K perpendiculares L X, & M Y rectæ lineæ. Cùm igitur L T, & M V (vt iam ostensum est) parallelę sint, proculdubio triangula L T X, & M V Y æquiangula sunt per 29 prop. & 4 pet. & 32 prop. & 3 Com. Senten. primi lib. eorundem Element. Quare per quartam prop. sexti lib. eorundem Elemen. ratio ipsius L T ad M V est sicut ratio ipsius L X ad M Y. Atqui L T maior quàm M V fuit ostensa, ergo per 9 Com. Sent. huius, & L X ipsa M Y maior est. Propior est itaque linea F G inflexa rectę I K in puncto M quàm in puncto L. Haud dissimiliter autem si describatur sub M P Q circulo alius quispiam circulus ipsi M P Q parallelus, concludetur iterum eadem F G linea in eius cum eodem circulo sectione propinquior esse eidem I K rectæ lineæ, quàm in signo M: idemque in infinitum ostendi potest. Quantò magis igitur præfatæ lineæ ad inferiores Coni partes vnà cum ipso Cono producentur, tantò sibi inuicem proximiores euadent. Quod secundò demonstrandum erat. Duas igitur in eodem plano lineas, & reliqua vt superiùs. Quod facere oportebat.

Demonstratio secundæ partis.

In hoc deficit Orótius.

Cõclusio secundæ partis.

Conclusio vniuersalis.

DE

DE DVABVS LINEIS RECTA, ET CVRVA NON COINCIDENTIBVS, & magis ſemper inuicem appropinquantibus in diuerſis Planis.

Prop.



RIVSQVAM reliquas inſtituti Problematis demonſtrationes perſequar cõmodum mihi videtur hoc in loco demonſtrare hanc eandem affectionem veram eſſe de duabus etiam lineis altera ſimiliter Hyperbolica, & altera recta, ambabus in Coni ſuperficie, ſed non in eodem plano iacentibus. Quod etiam ab Orontio in ſuo libello de ſpeculo vſtorio, & ab antiquo innominato Autore in fine libelli de ſectione Parabolæ quamuis ſatis obſcurè, imperfectèq; demonſtratum tamen fuit.

Expoſitio, & Conſtructio. Maneant igitur cuncta ſic diſpoſita vt in ſuperiori proxima Conſtructione, & per primam petitionem primi libri Element. Euclid. ducantur LN, & MP dimetientes parallelogrãmorum LRNT, & MSPV.

Determinatio. Dico duas lineas FG inflexam, & AD rectam in ſuperficie conica non in eodem plano iacentes in infinitum cum ipſo Cono protractas ſemper magis atq; magis ſibi inuicem proximari, nunquam tamen ſibi occurrere.

Demonſtratio. Quum.n. rectæ lineæ LR, MS in eiſdem parallelis ſint planis; erunt parallelæ, & æquales per 16 prop. 11, & 34 prop. primi lib. Elemen. Eucl. intelligendo ſcilicet rectas LM, RS lineas eſſe ductas. Atqui RN maior eſt quàm SP per Corollarium præaſſumpti Lemmatis. triangula igitur LRN, MSP per 4 Com. Sent. primi lib. Element. Eucl. habent duo latera LR, RN ſimul ſumpta duobus lateribus MS, SP ſimul ſumptis maiora, & rectos nihilominus angulos comprehendentia. Quadratum ergo ipſius LN quadrato ipſius MP per 47 prop. eiuſdem primi lib. maius eſt. vnde per 2 Com. Sentent. huius LN recta linea maior itidem eſt quam ipſa MP. Si itaque LN, & MP, rectæ lineæ ad ipſam AD rectam lineam perpendiculares

culares sunt, habemus intentum. Sin minus; ducantur à punctis LM ad rectam AD perpendiculares, & ostendetur superioribus rationibus inflexam FG lineam rectæ AD propinquiorem esse in puncto M, quàm in puncto L: & sic in infinitum, & nihilosecius nunquam coincident, cùm in duobus planis parallelis sint, sed aliquod semper inter eas erit interstitium maius quàm recta linea vtrique plano perpendicularis. si enim aliquando coinciderent, dubioprocul plana quoque ipsa parallela tunc sibi occurrerent, quod per 8 Definitionem 11 lib. Elementorum Euclid. nequaquam fieri potest. Duæ itaque lineæ in vna superficie conica, sed in

Demonstratio.

Conclusio.

in diuersis planis describi possunt, quę quantò magis in continuum producentur, tantò sibi propinquiores euadent, nunquam tamen inuicem coincident, etiam si in infinitum protractæ fuerint. Quod erat demonstrandum.

DE DVABVS LINEIS CVRVIS NON COINCIDENTIBVS, & magis semper sibi inuicem proximantibus tum in eodem, tum in diuersis Planis.

Propositio.



IC ampliùs prætereundum non est, quòd quemadmodum duas lineas inflexam scilicet, & rectam cùm in eodem, tum in diuersis planis accidentia supradicta patientes iam descripsimus: ita duas etiam curuas lineas tum eodem, tum diuersis in planis describere possumus, quippe quæ ijsdem passionibus afficiantur.

Expositio, & Constructio in codẽ plano.

Iacentibus itaque cunctis quemadmodum in secunda, & tertia propositi Problematis demonstratione, si construatur alius Conus iam extructo æqualis, & similis; priorique posterior ita incumbat, vt recta linea A D sit communis vtrique, planum verò Hyperbolis F G triangulari A D E plano parallelum continuè, directeque extendatur donec secet posteriorem, incumbentemùe Conum eodem modo, quo secat anteriorem succumbentem: statim liquebit propositum.

Demonstratio.

Communis enim sectio iam dicti Hyperboles F G plani, & conicæ superficiei nouissimi Coni erit linea curua similis incuruationis cum inflexa F G linea, quæ duæ curuæ lineæ non desinent continuè propiores inuicem fieri. quoniam vtraque ipsarum per ea, quæ hucusque demonstrata sunt magis magisque appropinquant rectæ lineæ I K eodem in plano eas interiacenti: & nihilosecius nunquam sese tangẽt, etiam si in infinitum vnà cum duobus Conis producantur. quandoquidem neque etiam cum recta I K inter ipsas media concurrent. Hæc autem imaginatione potiùs quàm ostensione indigent, quippe cùm ab ijs, qui superiores

res Conos extructos præ oculis habent perpulcrè quidem excogitari possunt. atque idcirco nullam huiusce rei configurationem subijcere libuit. Agè modo ostendamus quomodo duæ curuæ lineæ in vna superficie conica, diuersis tamen in planis affectionibus supra dictis succumbere offendantur. Si igitur in quolibet Cono duo plana sibi inuicem, & plano trianguli per axem parallela superficiem conicam intersecent: fient porrò in ipsa conica superficie duæ Hyperbolicæ lineæ, quæ quantò amplius vnà cum Cono producuntur, eò magis ac magis sibi proximant, nunquam tamen coincidentes adinuicem, quamuis etiam in infinitum extendantur. Cùm enim intermedio lateri trianguli per axem semper magis magisque appropinquent, cum ipsoque nunquam coëant (vt supra patuit) quòd etiam sibi continuè in infinitum propiores fiant, nunquam tamẽ inuicem conueniant, luce iam clarius relinquitur.

Expositio, & Constructio in diuersis planis.

Demonstratio.

QVAEDAM ELEMENTA CONICA QVARTAE DEMONSTRATIONI DESERVIENTIA.

DECLARATIS iam, atque restauratis tribus præcedentibus Demonstrationibus, in præsentia consequens est propositum nobis Problema iuxta doctrinam Apollonij Pergęi de Conicis tractantium principis demonstrare. ipse enim, licet imperfectè, exactiùs tamen cæteris omnibus Autoribus duas iam dictas lineas, in eodem plano in infinitum productas nunquam inuicem coincidere, & continuè sibi propinquiores fieri theorematicè demonstrauit in prima, & quartadecima propositionibus secundi libri suorum Conicorum Elementorum, in quarta verò eiusdem secundi libri demonstratione (quæ Apollonij non est, sed potiùs Eutocij, vt ibi rectè Federicus Commandinus adnotauit) iam dictæ non coincidentes lineæ problematicè secundùm Apollonij doctrinam describuntur. Volentibus igitur nobis de mente Apollonij nostrum admirandum Problema demonstrare, necessarium erit tres commemoratas propositiones primam scilicet, & quartam, & quartamdecimam secundi libri Conicorum Elementorum Apollonij

in vnam problematicam propositionem reducere. Quoniam verò tres iam dictæ propositiones in vnum reduci, perfecteque intelligi non possunt ni priùs quædam Elementa conica ab Apollonio in primo libro suorum Elementorum conicorum demonstrata rectè percipiantur; idcirco necessarium esse existimo ante quam ad propositi Problematis demonstrationem accedamus ea primùm hìc declarare. & præsertim quoniam Apollonius in Elementis suis propter nimiam breuitatem, & multorum Lemmatum suppositionem obscurissimus est. Ego autem (vt hoc opus nostrum omnino clarum sit) aliquantulum prolixiori, sed perfectiori quoad fieri poterit sermone ea declarabo, verbis ipsius Apollonij me nequaquam obligans: sed potiùs mentem ipsius amplioribus, lucidioribusque verbis explicans. Nam Græca quidem Apollonij Elementa adhuc edita non sunt: antequam autem à Federico Commandino Latina ederenter, ego ea maximo cum sudore in ipsa peruersa, ac sordida Ioannis Baptistæ Memi tralatione ex ingenio correxi, atque dilucidaui: postea verò cum quodam etiam exemplari Græco manu scripto (quod apud ipsum Commandinum erat) ea contuli. erant enim propter tralatoris illius Græcarum literarum, & Mathematicarum scientiarum ignorationem adeo imperfecta, vt nil fędius vnquam legi posset: quandoquidem maximo cum labore quid sibi velet Apollonius vix conijcere quispiam poterat. Quapropter ex ijsdem à nobis iam correctis Elementis conicis ea, quæ in præsentia proposito nostro deseruiunt, qualia tunc pro viribus instaurauimus, talia nunc in medium sumus allaturi. Primum igitur Elementum Conicum à nobis declarandum, ac illustrandum duodecima primi libri propositio apud Apollonium est. Quoniam autem in eius expositione quoddam ab Apollonio Lemma supponitur, quod in fine vndecimæ propositionis eiusdem primi libri breuiter, & particulatim Eutocius demonstrat: propterea priusquam dictam duodecimam propositionem declaremus, illud Lemma exquisitiori, & vniuersaliori demonstratione confirmabimus, quippequę diuersa sit ab illa Eutocij. Erit enim Problema non inutile huiusmodi.

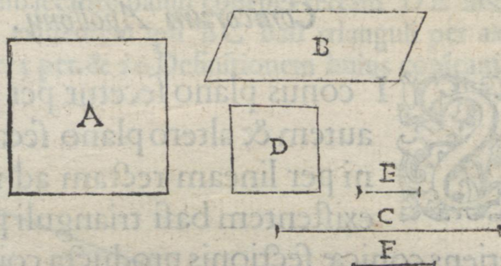
Lemma,

Lemma, seu Sumptio sequentis Elementi Conici.

Problema.

DATIS quadrato, & parallelo grammo, & recta linea: reperire lineam rectam, ad quàm habeat eandem rationem data recta linea, quam habet datum quadratum ad datum parallelogramum. Prop.

Sit datũ quadratum A, datum aut parallelogramum B, data verà recta linea C. volo inuenire aliam rectam lineam, ad quam habeat linea C eã rationem, quã habet quadratum A ad Parallelogramum B. Expo.



Constituatur per vltimam propositionem secundi libri Elementorum Eucl. dato rectilineo B æquale quadratum D. & per vndecimam propositionem sexti libri eorundem inueniatur recta linea E, ad quam habeat latus quadrati D eam rationem, quam habet latus quadrati A, ad latus quadrati D. deinde per duodecimam propositionem eiusdem reperiatur linea recta F, ad quam linea C habeat eam rationem, quam habet latus quadrati A ad lineam E. Constructio

Dico quòd linea F est ea, quam quærimus. Determinati

Quoniam itaque per Constructionẽ est vt latus A ad latus D sic latus D ad lineã E, erit per secundum Corollarium vigesimæ propositionis sexti libri Elementorum Euclidis ratio lateris A ad lineam E sicut ratio quadrati A ad quadratum D. sed ratio lateris A ad lineam E per Constructionem est sicut ratio lineæ C ad lineam F, igitur per xi. prop. quinti libri eorundem ratio quadrati A ad quadratũ D est vt ra- Demonst.

ratio

ratio lineæ C ad F lineam. Verùm per ſecundam partem ſeptimæ propoſitionis eiuſdem quinti quadratum A ad quadratum D eandem habet rationem, quam ad parallelogrammum B; ergo per eandem vndecimam datum quadratum A ad datum B parallelogrammum eandem habet rationem, quam data recta linea C ad inuentam F rectam lineam. quod eſt propoſitum. Datis igitur quadrato, & parallelogrammo, rectaque linea: reperta eſt quædam alia recta linea, ad quam eadem eſt ratio datæ rectæ lineæ, quæ dati quadrati ad datum parallelogrammum. Quod faciendum erat.

Concluſio.

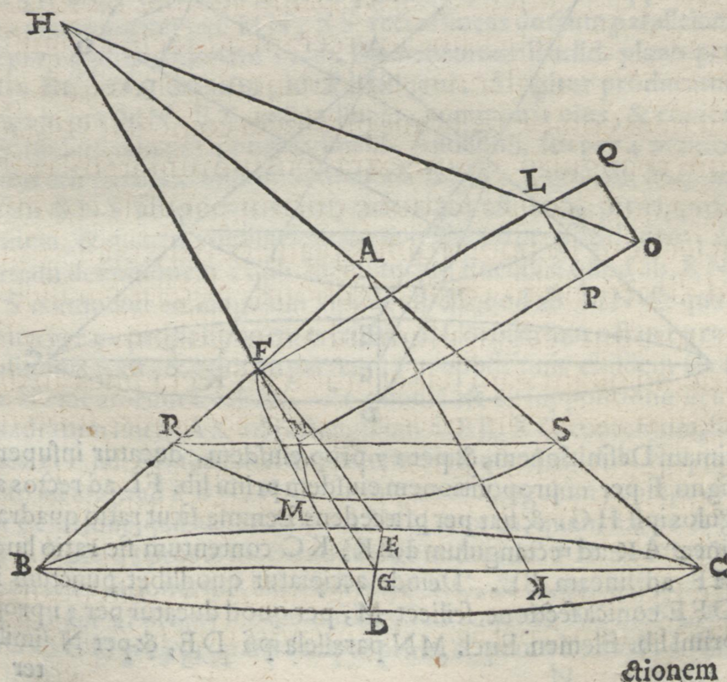
Elementum Conicum primum Propoſitio 12 primi libri Conicorum Apollonij.

Propoſitio.

SI conus plano ſecetur per axem, ſecetur autem & altero plano ſecante baſim coni per lineam rectam ad rectos angulos exiſtentem baſi trianguli per axem, & dimetiens conicæ ſectionis producta coincidat vni laterum trianguli per axim extra coni ſummitatem: recta linea, quæ à conica ſectione ducitur parallela communi ſectioni ſecundi ſecantis plani, & baſis coni vſque ad dimetientem conicæ ſectionis, poterit parallelogrammum rectangulum inhærens cuidam rectæ lineæ, ad quam eam habet rationem recta linea in directum iacens dimetienti conicæ ſectionis, ſubtendensq́ue angulum extra triangulum per axim, quam habet quadratum rectæ lineæ ductæ à ſummitate coni parallelæ dimetienti conicæ ſectionis vſque ad baſim trianguli per axim, ad rectangulum contentum à baſis trianguli per axem ſegmentis, quæ fecit ipſa ducta

ĉta à coni vertice; & latitudinem habens rectam lineam in conicæ sectionis dimetiente receptam ab ipsa potente vsque ad conicæ sectionis summitatem; & excedens parallelogrammo simili, & similiter posito ei, quod continetur ab ipsa subtendente angulum extra triangulum per axim, & illa linea, cui inhæret iam dictum rectangulum.

Sit conus cuius summitas punctum A, basis autem circulus BC, & secetur plano per axim, & faciet per 3 prop. pri. lib. Conicorũ Apollonij, seu per 3 pet. huius sectionẽ triangulum ABC. secetur autem & altero plano secante basim coni per rectam DE lineam ad rectos angulos existentem ipsi BC basi trianguli per axem ABC, & faciet per 5 pet. & 20 Definitionem huius conicam se- Expositio.



ctionem

Nota q hic dupliciter accipitur conica sectio, pro linea. s. & pro superficie, vt in 20 defin. huius declaratum fuit.

ctionem in superficie coni inflexam DFE lineam. Dimetiens autem conicæ sectionis sit FG, quæ producta coincidat vni laterum trianguli ABC, scilicet ipsi AC extra coni summitatem ad signum H. & per signum A ducatur AK per 31 prop. primi libri Elementorum Euclid. parallela dimetienti conicæ sectionis, quæ necessariò secabit ipsam BC inter signa GC (alioquin vel parallelæ coinciderēt, vel duo anguli HGC, & HCG trianguli CGH erunt aut æquales duobus rectis, aut maiores quàm duo recti per 29, & 16 prop. primi lib. Elemen. Eucl. quod fieri non potest per vltimam Definitionem, & per 17 prop. eiusdem. ducatur insuper à signo F per 11 propositionem eiusdem primi lib. FL ad rectos angulos ipsi HG. & fiat per præcedens Lemma sicut ratio quadrati lineæ AK ad rectangulum à BK, KC contentum sic ratio lineę HF ad lineam FL. Deinde accipiatur quodlibet punctum in DFE conica sectione, scilicet M, per quod ducatur per 31 prop. primi lib. Elemen. Eucl. MN parallela ipsi DE, & per N simili-

ter

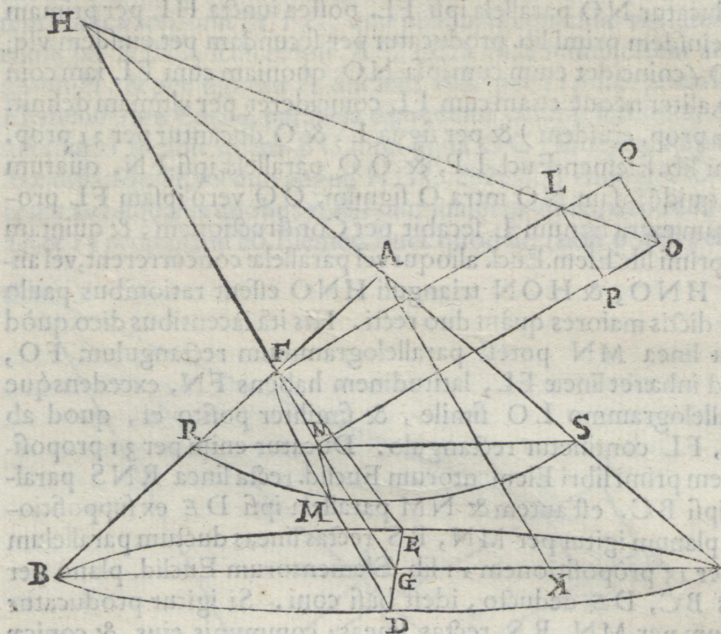
ter ducatur NO parallela ipsi FL. postea iuncta HL per primam pet.eiusdem primi lib. producatur per secundam pet.eiusdem vsq; ad O (coincidet enim cum ipsa NO, quoniam cum FL iam coincidit, aliter neque etiam cum FL coincideret per vltimam definit. & 30 prop. eiusdem) & per signa L, & O ducantur per 31 prop. primi lib. Elemen. Eucl. LP, & OQ parallelæ ipsi FN. quarum LP quidē ipsam NO intra O signum, OQ verò ipsam FL productam extra signum L secabit per Constructionem, & quintam pet.primi lib.Elem.Eucl. alioqui vel parallelæ concurrerent, vel anguli HNO, & HON trianguli HNO essent rationibus paulo antè dictis maiores quàm duo recti. His ita iacentibus dico quòd recta linea MN potest parallelogrammum rectangulum FO, quod inhæret lineæ FL, latitudinem habens FN, excedensque parallelogrammo LO simile, & similiter posito ei, quod ab HF, FL continetur rectangulo. Ducatur enim per 31 propositionem primi libri Elementorum Euclid. recta linea RNS parallela ipsi BC. est autem & NM parallela ipsi DE ex suppositione. planum igitur per MN, RS rectas lineas ductum parallelum est per 15 propositionem 11 lib. Elementorum Euclid. plano per ipsas BC, DE deducto, idest basi coni. Si igitur producatur planum per MN, RS rectas lineas; communis eius, & conicæ superficiei sectio per 4 prop.primi lib. Apollonij, seu per 4 petitio. huius erit circulus, cuius dimetiens est RNS. Quoniam itaq; ad ipsam RNS dimetientem perpendicularis est MN per suppositionem, & quartam definitionem, & octauam propositionem, & tertiam definitionem 11 lib.Elemētorum Euclidis: quod ab RN, NS continetur rectangulum æquale est ei, quod ab MN fit quadrato per 31 propositionem tertij lib. & Corollarium octauæ propositionis sexti, & primam partem 17 propositionis eiusdem sexti lib. Elementorum Euclidis. At quoniā est ex suppositione sicut quadratum lineæ AK ad rectangulum à BK, KC contentum, sic linea HF ad FL lineam: ratio autem eius, quod ab AK fit quadrati ad id, quod à BK, KC continetur rectangulum, componitur ex ratione, quā habet AK ad KC, & ex ea, quam habet AK ad KB per 23 prop.6 lib.eorundē: Igitur & ratio FH ad FL cōponitur ex ratione, quā habet AK ad KC, & ea, quā habet AK ad KB per 11 prop.5 li.eorundē Ele. Sed vt quidē AK ad KC, sic HG ad GC p 29 prop.bis sumptā primi, & quar.6 lib.eorūdē Ele.

Determinatio.

Constructio.

Demonstr:

N idest



ideſt HN ad NS per eaſdem, & 11 prop. quinti libri eorundem: vt verò AK ad KB ſic FG ad GB, ideſt FN ad NR per eaſdem: ratio igitur HF ad FL componitur ex ratione HN ad NS, & ratione FN ad NR per eandem vndecimam propoſitionem eiuſdem quinti libri. Compoſita autem ratio ex ratione HN ad NS, & FN ad NR eius eſt rectanguli, quod continetur ab HN, NF ad id, quod ab SN, NR per eandem 23 libri ſexti. Et ſicut igitur id, quod ab HN, NF ad id, quod ab SN, NR ſic HF ad FL per eandem vndecimam quinti lib. ideſt HN ad NO per eaſdem 29 prop. primi, & 4 ſexti, & 11 quinti libri eorundem. Verùm vt HN ad NO ſic quod ab HN, NF ad id, quod ab FN, NO per primam prop. ſexti lib. Elemen. Euclid. ſumpta linea F*N* pro communi altitudine. Et vt igitur quod ab H*N*, *N*F ad id, quod ab S*N*, *N*R ſic etiam ad id, quòd ab O*N*, *N*F per eandem vndecimam quinti lib. Quod itaque ab S*N*, *N*R æquale eſt ei, quod ab O*N*, *N*F per ſecundam partem 9 prop. eiuſdem quinti libri.

quòd

quòd verò fit ab MN æquale demonstratum est ei, quod ab SN, NR. igitur quod ab MN fit quadratum æquale est ei, quod ab ON, NF comprehenditur per primam Com. Sent. primi lib. Elementorum Euclid. quod autem ab ON, NF continetur est parallelogrammum rectangulum OF. igitur recta linea MN potest ipsum OF rectangulum, quippe quod inhæret lineæ FL, latitudinem habens FN, excedensque parallelogrammo LO simile, & similiter posito illi, quod ab HF, FL continetur rectangulo per propositiones 15,& 29 primi,& quartam sexti, & primam Definitionem eiusdem sexti libri Elemen. Eucl. vel per 24 prop. solam eiusdem sexti, facta Constructione. quod est propositum. Si igitur conus Plano secetur, & reliqua vt in propositione. Quod erat demonstrandum. Conclusio.

Definitiones ex hoc Theoremate emergentes.



VOCETVR autem talis conica Sectio Hyperbole: Linea verò FL; ad quam possunt ordinatim ductæ ad FG dimetientem, voceturque eadem & Recta, siue Rectum Latus formæ, idest rectanguli ab HF, FL contenti: linea autem FH, Transuersa, seu Transuersum formæ Latus.

1 Hyperbole quid.
2 Linea, ad quã possunt ordinatim ductæ, siue Recta, vel Latus Rectum formæ quid.
3 Latus Trãsuersum formæ, vel Tr. suersa linea quid.

Hasce tres ex præsenti Theoremate definitiones ijs, quæ sequuntur necessarias Apollonius excerpsit, vnde manifesta nobis nunc esse potest trium conicarum Sectionum etymologia, hoc est nominis significatio, quam superiùs in 21 definitionis commentario declarabamus. Linea enim FL vocatur linea, ad quam possunt ordinatim ductæ, quoniam ipsæ possunt quadrata æqualia iam dictis parallelogrammis rectangulis, quæ dum coaptantur ad ipsam FL lineam, in Parabole quidem applicantur ad ipsam ita vt eius longitudinem non excedant, nec excedantur ab ea: in Hyperbole verò, eam excedunt: in Ellipsi autem ab ea exceduntur. Vocatur autem ipsa FL etiam Recta, vel Rectum formæ Latus: Recta quidem, quoniam tum in Parabole, tum in Hyperbole, tum etiam in

Ellipsi ea linea, ad quam possunt ordinatim ductæ est erecta ad planum conicæ Sectionis: Rectũ verò formæ Latus, quandoquidem ex duobus illius formæ, cui similis in Hyperbole quidem excedit, in Ellipsi verò deficit, lateribus hoc quidem est erectum ad planum ipsius conicæ Sectionis, reliquum verò latus ad planum sectionis erectum non est, sed in ipso plano prostratum, atque transuersum iacet: vnde non immeritò Transuersa linea, seu Transuersum formæ Latus appellatur. Adnotandum autem est, quòd in Hyperbole quidem, & Ellipsi tres istæ definitiones locum habent: in Parabole verò nulla linea Rectum, vel Transuersum formæ Latus, seu linea Transuersa nuncupatur; quippe cum in ipsa non excedat iam dictum parallelogrammum longitudinem lineæ ad quam possunt ordinatè ductæ, nec ab eadem deficiat, sed ad eam applicetur. Quare in Parabole quidem linea, ad quam possunt ordinatim ductæ vocatur etiam Recta (ratione iam dicta) non autem Rectum formæ Latus: Transuersa verò linea, siue Transuersum Latus in Parabole nequaquam dicitur. idcirco Apollonius in fine vndecimæ propositionis primi libri suorum conicorum Elementorum, in qua Paraboles ortum, & propriam affectionem tradidit; Parabolem, & lineam, ad quam possunt ordinatim ductæ definiuit, quam etiam Rectam appellari dixit: de Lateribus autem Recto, & Transuerso, vel Transuersa linea nullam fecit mentionem. At in duodecima, & tertiadecima eiusdem primi propositionibus, in quibus tradidit Hyperboles, & Ellipsis generationes, propriasque affectiones: omnia iam dicta nomina tribus definitionibus declarauit. Præterea adnotandum est, quod etiam latus Rectum, seu Recta, vel linea, ad quam possunt ordinatim ductæ, necnon Basis Recta vocatur à Mathematicis illa recta linea, quæ cum ad axem sectionis ordinatè ducta sit, æqualis est axis parti à seipsa vsque ad Sectionis Summitatem terminatæ. De hac autem recta linea nullam nos in hoc opere facimus mentionem, quoniam nullum ipsa nobis vsum præbet. Tertiò adnotandum est, quòd si quis in Parabole quoque vellet Rectum quidem Latus, siue Rectam vocare eam lineam, ad quam possunt ordinatim ductæ: Transuersum verò Latus, seu Transuersam lineam reliquum latus ipsius parallelogrammi, quod ad ipsam Rectam applicatur æquale quadrato lineæ ordinatim ductæ: non esset incongruum. sunt etenim duo latera iam dicti applicati parallelogrammi, quorum vnum est erectum ad planum conicæ sectionis,

Not. primũ.

Not. secundum.

Not. tertiũ.

ctionis,

ctionis, alterum verò in ipso Sectionis plano prostratū atq; transuersum existit. Verùm Apollonius his vti nominibus in Parabole noluit ne confunderet Rectum, & Transuersum Latera formæ similis excessui, defectuique in Hyperbole, & Ellipsi cum Recto, & Transuerso Lateribus parallelogrammi, quod in qualibet trium conicarum Sectionum inhæret rectæ lineæ, ad quam possunt ordinatim ductæ. Hæc autem pro declaratione trium Apollonij definitionum, & etymologiæ trium conicarum Sectionum breuiter à nobis hoc loco dicta, adnotataque sint.

Elementum Conicum secundum, Propositio 21 primi libri Conicorum Apollonij.



SI ab Hyperbole, vel Ellipsi, vel circuli circunferentia rectæ lineæ ducantur ordinatim ad dimetientem: erunt quadrata earum ad rectangula contenta à lineis receptis in dimetiente ab ipsis ordinate ductis vsque ad terminos Transuersi formæ Lateris, vt Rectum formæ Latus ad Transuersum: adinuicem verò, vt contenta rectangula à iam dictis receptis lineis. Propositio.

Quamuis Apollonius affectionem huius Theorematis in tribus Subiectis, Hyperbole scilicet, Ellipsi, & circuli circunferentia vnica, & vniuersali demonstratione videatur demonstrare: animaduertendum tamen quòd illa demonstratio neque vna, neque vniuersalis est. quandoquidem Hyperboli, & Ellipsi, & circunferentiæ commune genus nominatum non inuenitur, in quod vna, & vniuersalis demonstratio fiat. hallucinatur autem (inquit Arist.) qui credit vniuersè demonstrare quando affectionem aliquam in quibusdam Subiectis demonstrat specie differentibus, quorū commune genus innominatum est, cui affectio illa per se inesse possit. Notandum. Primo post. tex. 12.

Non

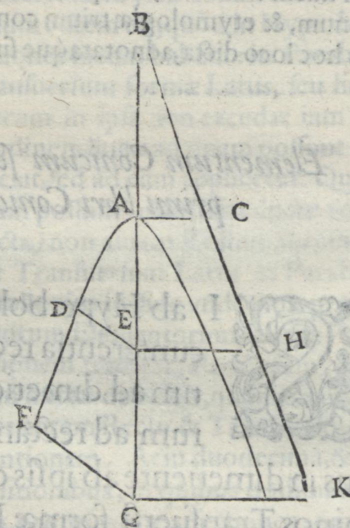
Non est igitur Apollonij demonstratio vniuersalis, nec vna: sed tres sunt demonstrationes, cùm tria quoque sint Subiecta, in quorum vnoquoq; affectio illa seorsum debet ostendi. Quapropter quum ad institutum nostrum necesse non sit nisi in sola Hyperbole præsentis Theorematis Quæsitum verum ostendere, de Hyperbole tantùm sermo nobis erit. Sit igitur Hyperbole, cuius dimeties AB, & Recta AC ad quam possunt ordinatè ductæ, & ducantur ad dimetientem ordinatim DE, & FG. Dico quòd sicut se habet quod ab FG fit quadratum ad id, quod ab AG, GB continetur rectangulum, sic linea AC ad AB lineam: sicut autem quod ab FG ad id, quod à DE, ita quod ab AG, GB ad id, quod ab AE, EB. Coniungatur per primam pet. primi lib. Elemen. Euclid. BC diuidens per medium ipsam formam, & per EG signa ducantur per 31 prop. eiusdē EH, & GK ipsi AC parallelæ, quę necessariò secabunt in punctis HK ipsam BC indirectum ad partes C per secundam pet. eiusdem productam; aliter BC esset parallela ipsi AC per vltimam definitionem, & 30 prop. primi lib. eorundem Elementorum, quod est contra Constructionem. His ita dispositis æquale est per præcedens Elementum quod quidem fit ab FG ei, quod à KG, GA continetur: quod verò à DE ei, quod ab HE, EA. Et quoniam vt KG ad GB, sic CA ad AB per 29 prop. primi; & 4 prop. sexti libri Elemen. Euclid. & vt KG ad GB (accepta AG pro communi altitudine) sic quod à KG, GA ad id, quod à BG, GA per primam prop. eiusdem sexti: vt igitur CA ad AB, sic quod à KG, GA, idest quod ab FG ad id, quod à BG, GA, per vndecimam, & septimam prop. quinti libri eorundem Elem. per easdem porrò vt quod fit à DE ad id, quod à BE, EA continetur sic CA ad AB. idemque eodem

Expositio.

Determinatio.

Cōstructio.

Demonstratio.



dem modo de omnibus alijs ordinatè ductis ostendetur. Patet itaque primum Theorematis membrum. At quoniam vt quod fit ab FG ad id, quod à BG, GA, sic quod à DE ad id, quod à BE, EA per iam demonstratum primum membrum, & per 11 prop. quinti lib. Element. Euclid. bissumptam: & alternatim igitur, seu permutando per 16 prop. eiusdem quinti lib. vt quod fit ab FG ad id, quod à DE, sic quod à BG, GA ad id, quod à BE, EA comprehenditur. Patet ergo & secundum. Si igitur ab Hyperbole rectæ lineæ ad dimetientem ordinatè ducantur, & reliqua, vt in propositione. Quod demonstrandum erat.

Conclusio primi membri.

Cõclusio secundi.

Conclusio vniuersalis.

Post duo iam posita Elementa conica consequens esset reliqua Elementa proposito nostro necessaria ponere, verùm quoniam Elementum, quòd à nobis consequenter ponẽdum est quibusdam Lemmatibus indiget, quæ ab Apollonio supponuntur: operæprecium est ea priùs proponere, ac demonstrare. tria verò hæc sunt, duo scilicet Problemata, quæ etiam ab Eutocio in fine 53 prop. primi lib. Conicorum Apollonij breuiter, & quàm obscurè, diminuteque demonstrantur: & vnum Theorema, quod hactenus à nemine demonstratum vidimus. Primum igitur trium dictorum Lemmatum à nobis demonstrandum tale problema sit.

Lemma primum, siue sumptio prima sequentis tertij Elementi, Problema primum.

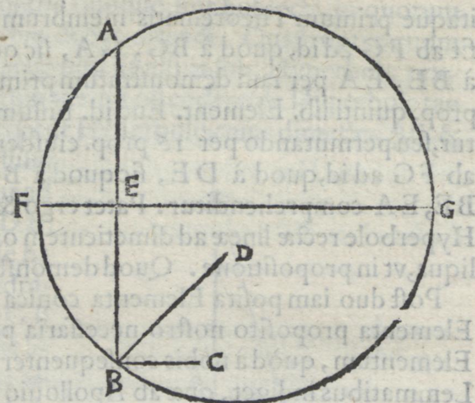
DVABVS datis rectis lineis terminatis, describere circulum per alterius earum extremitates transientem, cuius vna dimetiens à data recta in circulum coaptata sic secetur, vt pars ipsius dimetientis in altero circuli segmento resecta ad partem eiusdem dimetientis in reliquo circuli segmento resectam non habeat maiorem rationem ea, quam habet data recta linea in circulum coaptata, dimetientemque secans ad reliquam datam rectam lineam.

Propositio.

Sint

Expositio.

Sint duæ datæ rectæ lineæ AB, & BC; volo describere circulũ transeuntem per extremitates alterius earum, vt puta ipsius AB, cuius vtique circuli vna dimetiẽs sic à recta AB secetur, vt pars ipsius dimetientis in altero circuli segmento, verbi gratia dextro, resecta ad partem eiusdem dimetientis in reliquo circuli segmento, videlicet sinistro, resectam non habeat maiorem rationem ea ratione, quam habet data AB recta linea ad datam rectam lineam BC. Si autem maiorem rationem non habuerit, necessariò vel eandem, vel minorem habebit. quælibet enim ratio cuilibet rationi comparata, vel ipsi eadem, vel minor quàm ipsa, vel maior est. Volo igitur priùs ita describere circulum vt iam dictæ rationes eædem sint. Inueniatur itaq; per 13 propositionem sexti libri Elementorum Euclid. inter ipsas AB, & BC datas rectas lineas media proportionalis, quæ sit BD. & diuidatur recta AB per 10 propositionem primi lib. eorundem Elemen. per medium in signo *E*, à quo per vndecimã prop. eiusdem erigatur ipsi AB ad rectos angulos recta linea E*F*, quæ fiat per 3 prop. eiusdẽ æqualis dimidiæ parti lineæ BD, & per quintã propositionem quarti libri eorundem describatur circulus transiẽs per tria signa ABF, & per secundam petitionem eiusdem primi lib. producatur F*E* in partem *E* vsque quo secet circuli circunferentiam in G signo. Dico quòd FG est dimetiens circuli AFB: & G*E* ad *E*F eandem habet rationem, quam AB ad BC. Quod enim dimetiens sit patet per Constructionem, & per Corollarium primæ propositionis tertij libri Elementorum Euclidis: quòd verò eandem habeat rationem G*E* ad *E*F, quam AB ad BC sic probetur. Quoniam per Constructionem AB dupla est ipsius B*E*, & BD dupla ipsius *E*F: erit per 15 propositionem quinti libri Elementorum Euclid. AB ad BD sicut B*E* ad *E*F. sed



Diuisio Problematis in duas partes.

Constructio primæ partis.

Determinatio.

Demonstratio.

B*E* ad

BE ad EF, vt GE ad EB per 31 prop. tertij lib. & Corollarium octauæ propositionis sexti lib. eorundem Elemen. igitur per vndecimam propositionem eiusdem quinti lib. AB ad BD sicut GE ad EB. verùm AB ad BD, vt BD ad BC per Constructionem. ergo per eandem vndecimam prop. GE ad EB, idest EB ad EF, sicut BD ad BC. at probatum fuit quòd etiam GE ad EB, vt AB ad BD. igitur per 22 prop. quinti libri eorundem Elemen. vt AB ad BC, ita GE ad EF. quod est primum. Hoc facto, secundum etiam Problematis membrũ paucis absoluetur. Maneat enim tota prior dispositio, & producatur per secũdam pet. primi lib. Elem. Eucl. EF in partem F, & per 3 prop. eiusdem fiat EH tantæ longitudinis, vt sit maior dimidio ipsius BD. postea per eandem quintam prop. quarti lib. describatur circulus trãsiẽs per tria signa ABH, quippe qui circulus necessariò secabit priorem AFB circulum in duobus tantùm AB signis per 13, & 10 prop. tertij lib. Elementorum Euclidis. Cùm autem AHB circunferentia transiens per H signum sit extra circunferentiam AFB, proculdubio reliqua ipsius AHB circuli circunferentia cadet intra priorem circulum, secabitq; dimetientem eius in signo, quod sit I. His ita constructis, Dico quòd recta HEI linea est dimetiens circuli AHB: & IE ad EH minorem habet rationem quàm AB ad BC. Nam quòd dimetiens sit, constat vt supra. quòd verò IE ad EH minorem habeat rationem quàm AB ad BC sic liquebit. Quoniam ratio ipsius IE ad ipsam EH minor est quàm ratio ipsius GE ad eandem EH per 9 Com. Sent. primi, & primam partem octauæ prop. quinti lib. Elemen. Eucl. ratio verò GE ad EH minor adhuc est ratione eiusdẽ GE ad EF per secundam partem iam dictæ octauæ: ratio igitur IE ad EH

Conclusio primæ partis

Constructio secundæ partis.

Determinatio.

Demonstratio.

Cóclusio secundæ partis.

multò minor est quàm ratio G E ad E F, hoc est A B ad B C per primam partem huiusce propositionis, & 13 propositionem eiusdem quinti lib. Elem. Eucl. Quare factum est etiam secundum Problematis membrum. vt in secunda figura. Datis igitur duabus rectis lineis terminatis descripsimus circulum per alterius earum extremitates transientem, & reliqua vt in propositione. Quod facere oportebat.

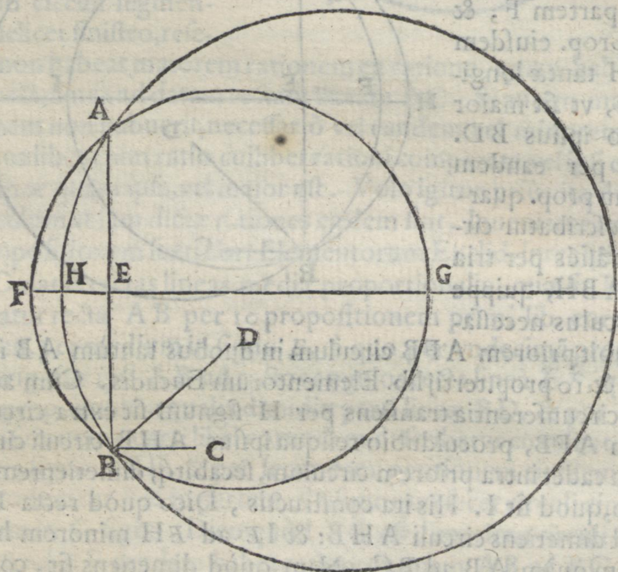
Conclusio vniuersalis propositionis.

Tertia Problematis pars.

Expositio.

Cóstructio.

Si quis autem velit tertiam quoque huic Problemati partem adiungere, ipsumque magis vniuersale facere, nempe quòd doceat etiam circulum circa datam A B rectam lineam ita describere vt altera suæ dimetientis pars ad reliquam habeat rationem maiorem quàm A B ad B C: facilè demonstrari poterit. Manente nanque



prima dispositione fiat per tertiam propositionem primi lib. Elem. Eucl. E H minor dimidio ipsius B D, & per quintam prop. quarti lib. eorundem Elem. circulus describatur trãsiens per tria A B H signa, qui secabit A F B circulum in duobus tantùm A B signis per 13, & 10 prop. tertij lib. eorundem Elemen. eiusque circunferentia

rentia AHB cadet intra circunferentiam AFB. quocirca reliqua eiusdem AHB circuli circunferentia cadet extra circulum AFB. propterea que dimetiens FEG producta in partem G, secabit ipsius AHB circuli circunferentiam, vtpotè in signo I. Hisce constructis Dico quòd linea HEI dimetiens est circuli AHB: & IE ad EH rationem habet maiorē, quàm AB ad BC. Quòd enim dimetiens sit, liquet vt supra: quòd verò IE ad EH maiorem habeat rationem, quàm AB ad BC, sic ostendetur. Quoniam ratio IE ad EH maior est ratione GE ad EH per primam partem octauæ propositionis quinti libri Elementorum Euclidis, ratio verò GE ad EH maior adhuc ratione GE ad EF per secundam eiusdem octauæ partem: ergo ratio IE ad EH multò maior est quàm ratio GE ad EF, idest quam AB ad BC per secundam partem tertiædecimæ propositionis quinti libri Elem. Eucl. à Campano additam, atque demonstratam. Patet igitur tertia quoque Problematis pars. vt in tertia descriptione. Placuit autem nobis eo modo præsens Problema proponere, quoniam duæ dumtaxat eius partes proposito nostro deseruiunt. Hoc autem Problema aliter, sed diminutè, obscureq; demonstratur ab Eutocio in fine 53 propositionis primi lib. Conicorum Apollonij. Cùm enim ipsum tres (vt iam vidimus) habeat partes, quarum duæ nimirùm ad ipsam 53 propositionem Apollonij construendam summopere necessariæ sunt: nihilominus primam partem solam Eutocius demonstrauit. eius verò demonstratio quam plurimos habet Casus, ex quibus ipse duos tantùm breuissimè demonstratos reliquit. vt in Apollonio, quem Federicus Commandinus nuper Latinum edidit, cuique videre licet.

Determin.

Demonstr.

Cōclusio tertiæ partis.

De Eutocij demonstratione, eiusq; defectibus.

Lemma secundum, siue Sumptio secunda, Problema secundum.

DATO semicirculo, & producta dimetiente extra ipsum in alteram partem quantumlibet; & ducta recta linea à puncto, in quo dimetiens ipsa producta secat circunferentiam, ad quoduis semicircunferentię pun-

Propositio.

ctum modò faciat angulum cum dimetiente; dataque ratione quadam, quæ maioris inæqualitatis non sit: Ducere à conuexa semicirculi circunferentia ad aliquod productæ dimetientis signum extra circunferentiam existens rectam lineam ipsi angulum facienti parallelam, cuius quadratum datam habeat rationem ad rectangulum contentum ab ipsa tota dimetiente vsque ad iam dictum extra iacens signum producta, & parte eiusdem productæ dimetientis exteriori inter punctum illud, & conuexam circunferentiam iacente.

Expositio. Sit semicirculus ABC super dimetientem AC, quæ producatur in partem C quantumlibet vsque ad D; & per primam pet. primi lib. Elem. Eucl. ducatur à puncto C ad quoduis semicircunferentiæ punctum recta CB linea faciens angulum ACB cum dimetiente; sitq; data ratio rectæ lineæ *E*F ad FG rectam lineam, quippequæ ratio non sit maioris inæqualitatis: opus est à conuexa semicircunferentia ad aliquod productæ dimetientis punctum extra ABC circunferentiam iacens rectam ducere lineam iam dictæ angulum facienti parallelam, cuius quadratum eandem habeat rationem ad rectangulum contentum ab ipsa tota dimetiente vsque ad iam dictum extra iacens punctum producta, & eius parte exteriori inter punctum illud, conuexamque circunferentiam iacente, quam habet recta *E*F linea ad rectam lineam FG.

Determin.



Diuisio casuum Problematis. Cùm ita que supponatur datam rationem non esse maioris inæqualitatis, manifestum est quòd aut

aut æqualitatis ratio, aut ratio minoris inæqualitatis erit. Omnis enim ratio duplex est, vel æqualitatis, vel inæqualitatis: & ipsa quidem æqualitatis ratio vnica tantùm est, cùm in alias species diuidi non possit: ratio verò inæqualitatis dupliciter diuiditur, aut enim est ratio maioris inæqualitatis, aut minoris. harum autem quælibet in alias adhuc diuiditur species. Quare quæuis ratio vel erit æqualitatis, vel inæqualitatis maioris, vel minoris. Si igitur data in præsentia ratio fuerit æqualitatis, vt scilicet data EF recta linea datæ FG rectæ lineæ sit æqualis: quæsitum paucis absoluetur. Ducatur enim per 12 prop. pri. lib. Elem. Eucl. à semicirculi centro H ad ad ipsam BC perpendicularis, quę per secundam pet. eiusdem producta coincidat circunferentiæ ad I signum, per quod ducatur per 31 prop. eiusdem pri. lib. IK parallela ipsi BC, coincidens per 29, & 32 prop. & quintam pet. eiusdem pri. lib. Elemen. cum ipsa AD in puncto K; tangensq; circulum in puncto I per 29, & 13 prop. primi, & Corollarium 16 prop. tertij lib. Elem. Eucl. Dico ꝙ Quæsitum factum est. Nam per 36 prop. eiusdem tertij lib. quadratum ipsius IK æquale est rectangulo ab AK, KC comprehenso, quẽadmodum etiã EF linea æqualis est lineæ FG. Ratio igitur æqualitatis quadrati lineæ IK parallelæ ipsi BC ad rectangulum ab AK, KC contentũ eadẽ est, quę lineę EF ad lineã FG. quod est primũ propositum. Si verò data ratio non fuerit æqualitatis, sed (quod reliquum est) minoris inæqualitatis, videlicet ꝙ linea EF minor sit quam FG, abscindatur per 3 prop. pri. lib. Elem. Eucl. ab FG maiore ipsi EF minori æqualis FH, & secetur HG per medium in signo I per 10 prop. eiusdem, & à semicirculi centro K (vt supra) ducatur ad ipsam BC perpendicularis, quæ producta coincidat circunferentiæ ad L signum, per quod ipsi BC parallela LM ducatur, coincidens cum ipsa

Vide Boetium in primo libro suę Arithmeticæ cap. 17, & 18.

Primus casus.

Constructio primi casus.

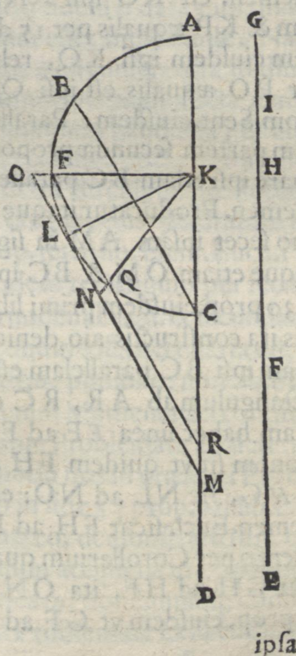
Determinatio.

Demonstr.

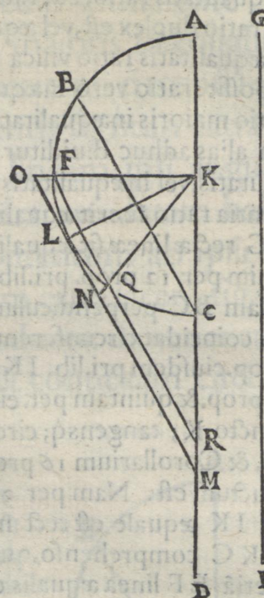
Conclusio.

Secundus casus.

Constructio secundi casus.



ipſa A D in puncto M, tangensque circulum in puncto L rationibus ſuperiùs dictis. Deinde fiat ſicut F H ad H I, ſic M N ad N L per decimam propoſitionem ſexti libri Elementorum Eucl. & per ſecundam petitionem, & tertiam prop. primi libri eorundem Elem. fiat L O æqualis ipſi L N, & ducantur per primam pet. eiuſdem K N, & K O ſecantes neceſſariò ſemicircunferentiam ad P Q ſigna, per eandemque primam petitionem ducatur linea recta P Q. Quoniam igitur N L æqualis eſt ipſi L O, communis verò, & ad rectos angulos ipſa K L: æqualis etiam per quartam prop. primi lib. eorundem Elemen. eſt K O ipſi K N. eſt autem & K P æqualis per 15 definitionem eiuſdem ipſi K Q, reliqua igitur P O æqualis eſt ipſi Q N per 3 Com. Sent. eiuſdem. Parallela ergò eſt P Q ipſi M O, per ſecundam partem ſecundæ propoſitionis ſexti libri Elementorum Eucl. quare ipſi etiam B C parallela eſt per 30 prop. primi lib. eorundem Elemen. Producatur itaque P Q per ſecundam pet. eiuſdem vſq; quo ſecet ipſam A M in ſigno R. Secabit enim ipſam; alioqui neque etiam O M, & B C ipſam ſecarent per vltimã definitionem, & 30 prop. eiuſdem primi lib. quod eſſet contra Conſtructionem.



Determinatio. His ita conſtructis aio denique quadratum lineæ Q R (quippe quam ipſi B C parallelam eſſe iam in Conſtructione conſtauit) ad rectangulum ab A R, R C contentum eandem habere rationem, quam habet linea E F ad F G lineam.

Demonſtratio. Quum enim per Conſtructionem ſit vt quidem F H ad H I, ſic M N ad N L; vt verò H I ad H G, ſic N L ad N O: erit ex æquali per 22 prop. quinti libri Elemen. Eucl. ſicut F H ad H G, ita M N ad N O. & conuertendo ergo per Corollarium quartæ propoſitionis eiuſdem quinti lib. ſicut G H ad H F, ita O N ad N M. & componendo igitur per 18 prop. eiuſdem vt G F ad F H, ideſt per ſecundam partem ſe-

ptimæ

ptimæ propositionis,& vndecimam propositionem eiusdem quinti lib. ad ipsi æqualem FE, sic OM ad MN, idest PR ad RQ per propositiones vicesimãnonam primi,& quartam sexti,& vndecimam quinti bis sumptas, & 16 prop. eiusdem quinti lib. Elemen. Eucl. semel sumptam. Vt autem PR ad RQ, ita quod à PR, RQ ad id,quod à QR per primam propositionem eiusdem sexti lib. Elemen. æquale verò est quod à PR, RQ ei, quod ab AR, RC per 36 prop. tertij, & primam Com. Sent. primi lib.eorundem Elem. vt igitur GF ad FE, sic quod ab AR, RC ad id, quod à QR per eandem vndecimam prop. quinti lib. bis, & septimam eiusdem semel sumptas. & conuertendo itaque per Corollarium quartę propositionis eiusdem quinti lib.Elem.vt EF ad FG, sic quod fit à QR quadratum ad id, quod ab AR, RC continetur rectangulum. quod est secundum propositum. Dato igitur semicirculo,& producta dimetiente, & reliqua vt in propositione. Quod faciundum erat. Nunc autem animaduertendum est quòd non immeritò supposuimus in hoc Problemate datam rationem non esse maioris inæqualitatis. quandoquidem si data ratio maioris esset inæqualitatis,Problema nimirùm esset impossibile. Nam fieri non potest vt quadratum rectæ lineæ à circunferentia ad dimetientem extra circulum productam quomodocunque ductæ maius sit rectangulo à tota dimetiente extra circulum producta, & eius externa parte contento. quæuis enim rectalinea ducta quomodolibet à circunferentia ad dimetientem extra dirculum productam vel tangit circulum,vel secat. quòd si tangat, eius quadratum est æquale iam dicto rectangulo per 36 prop.tertij lib.Elem.Eucl.si verò secet,eius quadratum erit minus eodem rectangulo per secundam partem octauæ prop.tertij lib. eorundem Elem. & secundam, & septimam Com.Sent.huius. Quare conditio illa necessaria est, vt præsens Problema conditionatum sit, atque possibile: non autẽ indeterminatum,ac impossibile. Solent enim Mathematici conditionibus ipsis indeterminata, impossibiliaque Problemata ad determinata,possibiliaque reducere. quemadmodũ nos in præsenti Problemate fecimus,quippequod ab Eutocio in fine 53 prop.pri.lib.Conicorũ Apollonij diminutè,indeterminateq; demonstratũ fuit. qm̃ casus eius non distinxit,sed secundũ casum accipiens in eo propositũ demõstrauit, nullã de primo casu faciẽs mẽtionẽ,nullãq; cõditionẽ adijciens,quę tertiũ,ac impossibilẽ à Problemate casũ excludat.

Conclusio secundi.

Conclusio vniuersalis.

Notandum.

Defectus demõstrationis Eutocij.

Lemma

Lemma tertium, seu Sumptio tertia.

Theorema.

Propositio.



SI tres quantitates sint continuè proportionales, fuerintq; duæ earum extremæ æquales: media quoq; ipsis æqualis erit Quòd si extremæ inæquales fuerint, media erit maiori quidem minor, minori verò maior.

Expositio.

Sint tres quantitates continuè proportionales ABC, sicut A ad B, sic B ad C: Dico quòd si A, & C æquales fuerint, B quoque vtrique earum æqualis erit: si autē A, & C inæquales fuerint, verbi gratia quòd A sit maior qnàm C; ipsa quoque B ipsis A, & C inæqualis erit; nempe minor quidem quàm A, maior verò quàm C.

Determinatio.

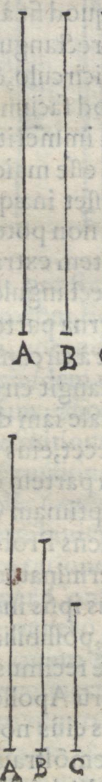
Sint itaque primùm A, & C æquales adinuicem. Si igitur B etiam non est ipsis æqualis, sed inæqualis (aut enim æqualis, aut inæqualis) sit causa exempli B maior quàm A, hoc est A minor quàm B. erit ergo & B minor quàm C. eadem enim est ratio A ad B, quæ B ad C ex suppositione. igitur A quàm C multò minor erit. quod vtique suppositioni oppugnat, cùm æquales esse iam suppositæ sint. Similiter si B fuerit minor quàm A, hoc est A maior quàm B: erit etiam A multò maior quàm C, quod etiam est suppositioni contrarium. Quare cùm B neq; maior, neque minor sit quàm A: necessariò ipsi æqualis est. Cùm autem æqualis ei sit, etiam ipsi C per primam Com. Sent. primi lib. Elementorū Euclidis erit æqualis. Vtrique igitur æqualis est.

Demonstratio primæ partis.

Conclusio primæ partis.

quod est primum propositionis membrum. Sint secundò A, & C inæquales, sitque gratia exempli A maior quàm C. si itaque B non fuerit minor quàm A, erit aut ipsi æqualis, aut maior

Demonstratio secundæ partis.



quàm

quàm ipsa. Sic primùm æqualis. erit igitur ipsi quoque C æqualis, quoniam vt A ad B, sic B ad C supponitur. vnde per eandem primam Com. Sent. A etiam ipsi C æqualis erit, quod est contra suppositionem. Non est igitur B æqualis ipsi A. Sit modò maior quàm ipsa, hoc est A minor quàm B. ergo & B minor erit quàm C. multò minor igitur erit A quàm C, cuius contrarium supponebatur. quare neque etiam maior est B quàm A. Cùm itaque B neque maior quàm A sit, neque ipsi æqualis: necessariò minor quàm ipsa est, idest A maior quàm B. vnde etiam B maior erit quàm C. quod est secundũ propositionis membrũ. Similiter si supponatur C esse maiorẽ quàm A, ostẽdetur B esse minorẽ quàm C, & maiorẽ quàm A. Perspicua igitur est vtraq; Theorematis pars. Si ergo tres quantitates sint continuè proportionales, & reliqua vt in propositione. Quod demõstrasse oportuit.

Cõclusio secũdæ partis.

Conclusio totius.

Propositis iam, atque demonstratis tribus Lemmatibus, quibus sequens tertium Elementum egebat: modò consequens est, vt ad ipsum Elementum nos conferamus. Verùm si qua est Apollonij Propositio, quæ correctione, instaurationeque indigeat, sequens quinquagesimatertia potissimùm vna mihi esse videtur. quandoquidem nonnullis in locis cùm mendosè legitur, tum propter maximam Apollonij breuitatem obscurissima, ac mutila est, tum etiam duas maximas in se falsitates continet. Eam igitur qualem pro viribus correxi, atque instauraui, talem nunc in medium affero. De ipsius verò mendis, defectibus, ac falsitatibus in sequẽtis Elementi fine breuiori, quo ad fieri poterit, sermone aliquid dicam.

Vide in fine sequẽtis Elementi conici digressionem contra Apollonium.

Elementum Conicum tertium, Propositio 53 primi libri Conicorum Apollonij.



DVABVS datis rectis lineis terminatis ad rectos angulos inuicem iunctis, alteraq; producta in easdem partes, vbi est rectus angulus: inuenire in producta Coni Sectionem nuncupatam Hyperbolem in eodem plano cum datis lineis iacentem, ita vt producta quidem linea dimetiens sit Sectionis, Summitas verò Sectionis

Propositio.

sit punctum ad angulum existens, quæ autem ducitur ordinatim à sectione ad dimetientem angulum faciens æqualem cuilibet angulo rectilineo dato, possit rectangulum inhærens reliquę lineę, & latitudinem habens rectam lineam in dimetiente receptam ab ordinatè ducta vsque ad Sectionis summitatem; & excedens parallelogrammo rectangulo simili, similiterque iacente ei rectangulo, quod à lineis à principio datis comprehenditur.

Expositio. Sint duæ datæ rectæ lineæ ad rectos angulos inuicem iunctæ AB, & BC, & producatur per secundam petitionem primi libri Elementorum Euclidis AB ad D interminatè: oportet inuenire in plano transienti per ipsas AB, BC Hyperbolem, cuius dimetiens quidem sit ABD, Summitas verò B, ductæ autem ordinatim à Sectione ad BD facientes angulum æqualem cuilibet angulo dato rectilineo, possint rectangula inhærentia ipsi BC, & latitudines habentia rectas in AD dimetiente receptas ab ipsis ordinatè ductis vsque ad B Summitatem; & excedentia parallelogrammo rectangulo simili, similiterque iacente ei rectangulo, quod à lineis AB, BC continetur.

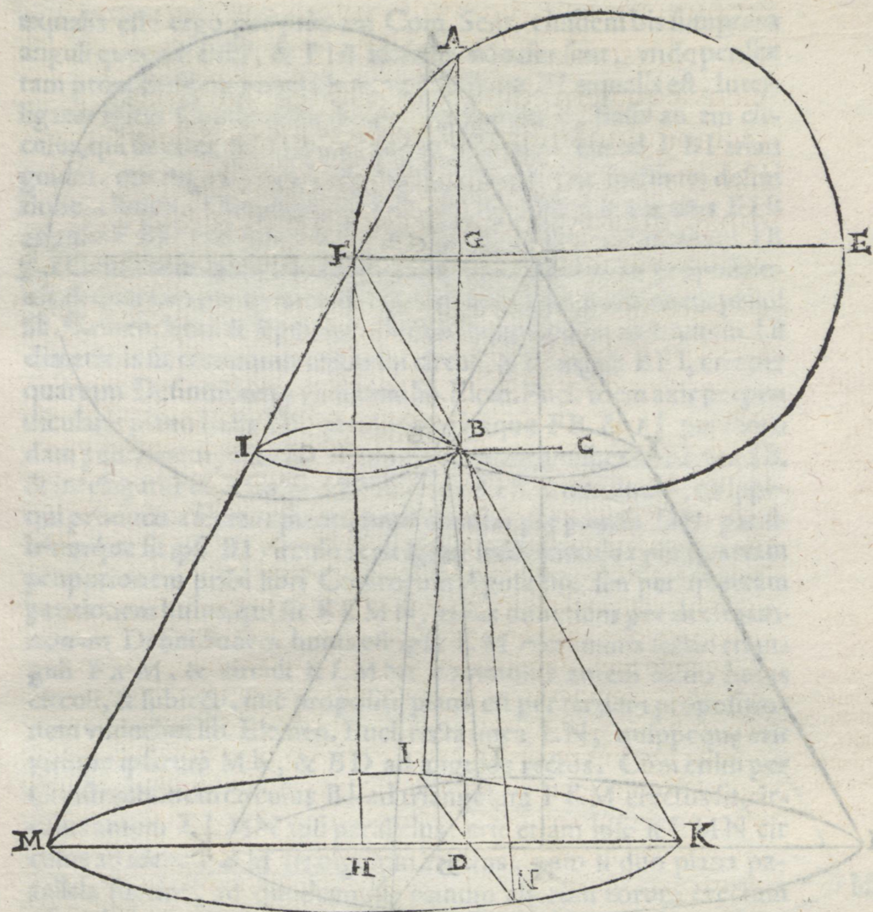
Determinatio.

Diuisio casuũ Problematis. Quoniam autem datus angulus, cui æqualem ordinatè ductæ facere debent aut rectus, aut non rectus esse potest: sit priùs rectus.

Primu casus. Constructio ptimi casus. & exurgat ex AB recta linea planum erectum ad subiectum, seu propositum ipsarum AD, BC linearum planum; in quo quidem erecto plano circa lineam AB per primum huius Elementi Lemma circulus describatur transiens per AB signa, qui sit AEBF, cuius vna dimetiens à data recta AB sic secetur, vt pars ipsius dimetiẽtis in AEB altero circuli segmento resecta ad partem eiusdem dimetientis in AFB reliquo circuli segmento resectam nõ habeat maiorem rationem ea ratione, quam habet linea AB ad BC lineam, sed vel eandem, vel minorem. aut

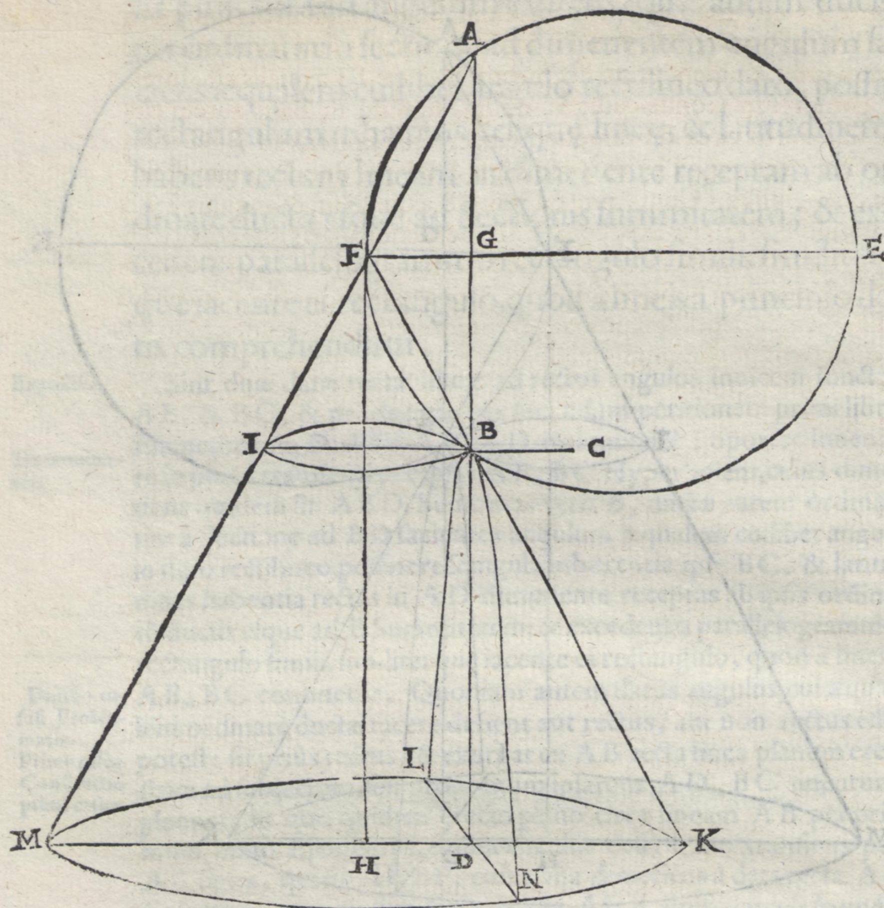
Primi casus subdiuisio in duo mẽbra. enim eãdem, aut minorem, aut maiorem habebit. sit igitur EGF dimetiens illa, cuius pars EG ad partem GF non habet maiorem rationem ea, quam habet AB ad BC, quæ quidem circuli dimetiens (vt ęx Constructione iam dicti primi Lemmatis manifestum est) secabit lineam AB per medium, & ad rectos angulos

in



in G signo. si itaque primùm E G ad G F rationem habet eandem, quam A B ad B C, ducatur per punctum F linea F H interminata ex parte H, & ipsi A D parallela per 31 prop. primi lib. Element. Eucl. ducâturque per primam pet. eiusdem lineæ A F, & F B, & per signum B per eandem 31 ducatur B I parallela ipsi F G, & per secundam pet. eiusdem producatur A F quousq; secet ipsam B I in signo I. secabit enim eam necessariò per quintam

Primi mẽbri primi casus constructio, quod mẽbrũ non declarauit Apollonius, sed vnico verbo tetigit.

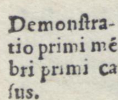


tam petitionem primi lib. Elementorum Euclid. quoniam anguli ABI, IAB sunt duobus rectis minores per Constructionem, & 29, & 32 propositionem eiusdem. Quoniam itaq; anguli AFE, EFB per Constructionem, & quartam petitionem, & quartam propositionem eiusdem primi lib. Elem. æquales sunt: quorum ipse quidem AFE ipsi FIB, ipse verò EFB ipsi FBI per primam, & secundã partem vicesimęnonę prop. primi lib. eorundem Elem.

æqualis

æqualis est: ergo per primam Com. Sent. eiusdem bis sumptam anguli quoque FBI, & FIB inuicem æquales sunt. vnde per sextam prop. eiusdem primi lib. linea FB lineæ FI æqualis est. Intelligatur igitur Conus, cuius Summitas signum F, Basis autem circulus, qui sit circa BI dimetientem, erectus existens ad FBI triangulum. erit ergo Conus Rectus ipse FBI per duodecimam definitionem huius. Cùm enim FI ipsi FB æqualis sit, & angulus FIB angulo FBI: erit axis coni FIB perpendicularis dimetienti IB per Constructionem, & primam, & tertiam partem 29 propositionis, & quartam petitionem, & 26, & quartam propositionem primi lib. Elemen. Eucl. & septimam Definitionem huius: cùm autem IB dimetiens sit communis sectio sui circuli, & trianguli BFI, erit per quartam Definitionem vndecimi lib. Elem. Eucl. idem axis perpendicularis plano basis IB. producatur itaque FB, & FI per secundam petitionem primi lib. Elem. Eucl. quantumlibet in partes IB, & intelligatur cum eis produci Conus FIB interminatè, quippequi productus secetur plano, quod transeat per puncta DH, parallelumque sit ipsi BI circulo: erit igitur sectio circulus per quartam propotionem pribi libri Conicorum Apollonij, seu per quartam petitionem huius, qui sit KLMN, cuius dimetiens per decimamnonam Definitionem huius est ipsa KM communis sectio trianguli FKM, & circuli KLMN: communis autem sectio huius circuli, & subiecti, siue propositi plani est per tertiam propositionem vndecimi lib. Elemen. Eucl. recta linea LN, quippeque erit vtrique ipsarum MK, & BD ad angulos rectos. Cùm enim per Constructionem circulus BI ad triangulum FKM erectus sit, circulus autem KLMN ipsi parallelus: erit etiam ipse KLMN circulus ad idem FKM triangulum erectus. nam si duo plana parallela fuerint, ad quodcunque planum alterum eorum erectum est, ad idem reliquum etiam erectum erit. quod facilè construi, probarique potest per 11, & 16, & 8, & 18 propositionem vndecimi libri Elementorum Euclid. Est autem per Constructionem & subiectum, idest propositum planũ erectum ad idem triangulum. igitur recta linea LN ad eiusdem trianguli planum erecta est per decimamnonam prop. eiusdem vndecimi. quare per tertiam definitionem eiusdem ad omnes etiam tangentes ipsam rectas lineas, & existentes in eodem plano rectos facit angulos. His ita constructis, dico factũ esse quod queritur; demõstratio autẽ est huiusmodi. Determin. primi membri primi casus.

Quoniam



Demonstratio primi membri primi casus.

Quoniam Conus, cuius Basis circulus KLMN, & Summitas F, sectus est plano per axim faciente per tertiam petitionem huius triangulum FKM; sectus est autem & altero plano, scilicet subiecto, vel proposito secanti basim coni per rectam lineam LN ad rectos angulos existentem ipsi KM basi trianguli per axem; communis autem sectio subiecti plani, & plani FMK, seu per 22 definitionem huius conicæ LBN Sectionis dimetiens, ipsa scilicet DB

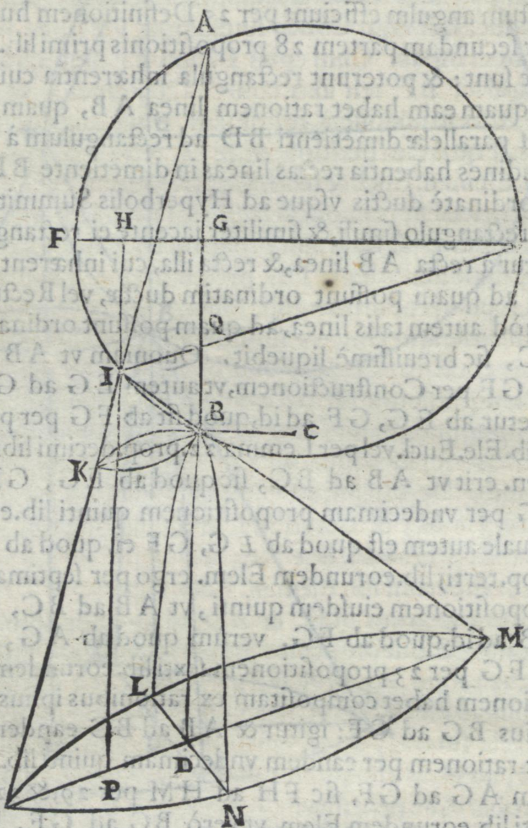
recta

recta linea producta in partem B coincidit per Constructionem ipsi MF lateri trianguli MFK ad A signum: erit Hyperbole ipsa LBN conica Sectio per superiùs demonstratum primum conicum Elementum. cuius Summitas quidem est punctum B per 23 definitionem huius, dimetiens verò BD, ad quam ordinatè ductę rectum angulm efficiunt per 25 Definitionem huius, & ipsi LDN per secundam partem 28 propositionis primi lib. Elem. Eucl. parallelæ sunt: & poterunt rectangula inhærentia cuidam rectæ lineæ, ad quam eam habet rationem linea AB, quam quadratum lineæ FH parallelæ dimetienti BD ad rectangulum à KH, HM; & latitudines habentia rectas lineas in dimetiente BD receptas ab ipsis ordinatè ductis vsque ad Hyperbolis Summitatem; & excedentia rectangulo simili, & similiter iacente ei rectangulo, quod continetur à recta AB linea, & recta illa, cui inhærent dicta rectangula, seu ad quam possunt ordinatim ductæ, vel Rectum formæ Latus. Quòd autem talis linea, ad quam possunt ordinatim ductæ, sit ipsa BC, sic breuissimè liquebit. Quoniam vt AB ad BC, sic EG ad GF per Constructionem, vt autem EG ad GF, ita quod continetur ab EG, GF ad id, quod fit ab FG per primam prop. sexti lib. Ele. Eucl. vel per Lemma 22. prop. decimi libri eorundem Elemen. erit vt AB ad BC, sic quod ab EG, GF ad id quod ab FG per vndecimam propositionem quinti lib. erundem Elemen. æquale autem est quod ab EG, GF ei, quod ab AG, GB per 35 prop. tertij lib. eorundem Elem. ergo per septimam, & vndecimam propositionem eiusdem quinti, vt AB ad BC, sic quod ab AG, GB ad id, quod ab FG. verùm quod ab AG, GB ad id, quod ab FG per 23 propositionem sexti lib. eorundem Elemen. Euclid. rationem habet compositam ex rationibus ipsius AG ad GF, & ipsius BG ad GF: igitur & AB ad BC eandem compositam habet rationem per eandem vndecimam quinti lib. Elem. Sed vt quidem AG ad GF, sic FH ad HM per 29, & 32 primi, & 4 prop. sexti lib. eorundem Elem. vt verò BG ad GF, sic FH ad HK per eãdem 29, & 34 primi, & quartam prop. sexti lib. eorundẽ Ele. igitur per vndecimã prop. eiusdẽ quinti, & primã Com. Sent. huius AB ad BC rationem habet compositam ex ea, quam habet FH ad HM, & FH ad HK, idest eam, quam habet quod fit ab FH ad id, quod ab HM, HK continetur per eandem vicesimamtertiam sexti, & vndecimã quinti lib. Quoniam autem FH per Constructionem

Cõclusio primi membri primi casus.

structionem parallela est ipsi AD; erit per superiùs demonstratum primum Conicum Elementum, & eius definitiones AB quidem Transuersum, BC autem Rectum formæ Latus. Quare factum est id quod quærebatur. Si autem EG ad GF non habuerit eandẽ rationem, quã habet AB ad BC, sed minorẽ: fiat per 12 prop. sexti lib. Element. Eucl. vt AB ad BC, sic EG ad quãdam aliam quartam lineam, ad quã vtiq; per suppositionẽ, & tertiamdecimã propositionem quinti lib. eorundẽ Elem. habebit EG maiorem rationem quàm ipsamet EG ad GF. vnde per secũdam partem decimę propositionis eiusdem quinti lib. Elemen. ipsa quarta linea erit minor quàm FG. quare per tertiam prop. primi lib. Elem. Eucl. abscindatur ab FG maiore ipsi quartæ minori æqualis, quæ sit GH. erit igitur per secundam partem septimæ propositionis, & vndecimam quinti lib. eorundem Elem. sicut AB ad BC, sic EG ad GH.

Secundi mẽbri primi casus constructio.



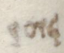
quo

quo facto per signum H ducatur per tricesimamprimam propositionem primi lib. Elementorum Euclid. HI parallela ipsi AB, & per primam petitionem eiusdem ducantur rectę lineæ AI, IE, IB. & per B signum ducatur per eandem tricesimamprimam primi BK parallela ipsi IE. & per secundam petitionem eiusdem producatur AI donec secet ipsam BK in signo K. secabit enim eam cùm secet ipsi parallelam IE, alioqui neque etiam ipsam secaret per vltimam definitionem, & tricesimam propositionem eiusdem primi. Quoniam igitur per Constructionem primi Lemmatis huius Elementi, & quartam petitionem primi lib. Elementorum Euclid. anguli AGE, BGE inuicem æquales sunt: necnon linea AG lineæ GB æqualis, & GE communis: erit per quartam propositionem primi, & 28 prop. tertij libri eorundem Elemen. circunferentia AE æqualis circunferentię BE. Quapropter æqualis est angulus AIE angulo EIB per vicesimamseptimam propositionem eiusdem tertij. sed angulus AIE est æqualis angulo AKB per secundam partem vicesimæno næ primi lib. eorundem Elemen. & angulus EIB angulo KBI per primam partem eiusdem: igitur & angulus KBI angulo IKB æqualis est per primam Com. Sent. eiusdem primi lib. Element. bis sumptam. ergo linea quoque BI æqualis est lineæ IK per sextam propositionem eiusdem. modò intelligatur Conus, cuius Summitas punctum I, Basis autem circulus, qui est circa dimetientem BK, erectus existens ad BIK triangulum. Erit igitur Conus iste Rectus rationibus superiùs dictis, quandoquidem æqualis est IB ipsi IK. Producantur itaque per secundam petitionem primi lib. Elemen. Eucl. lineæ BI, IK, IH in partes IBK; & vnà cum eis intelligatur totus protrahi Conus BIK, qui quantumlibet protractus secetur plano, quod transeat per D signum, & parallelum sit ipsi BK circulo. erit igitur sectio circulus per quartam petitionem huius, vel per quartam propositionem primi lib. Conicorum Apollonij. Sit ipse LMNO, cuius dimetiens per 19 definitionem huius est ipsa MO communis sectio trianguli IMO, & circuli LMNO. Communis autem sectio huiusce circuli, & subiecti plani est LDN recta linea per tertiam propositionem vndecimi libri eorundem Element. quæ rationibus superiùs dictis vtrique linearum OM, & DB ad rectos est angulos. His hoc modo constructis, dico quòd quæsitum factum est. Cùm enim Conus, cuiusq;

In hoc Apollonius errorem cōmisit.

prop

Determin.



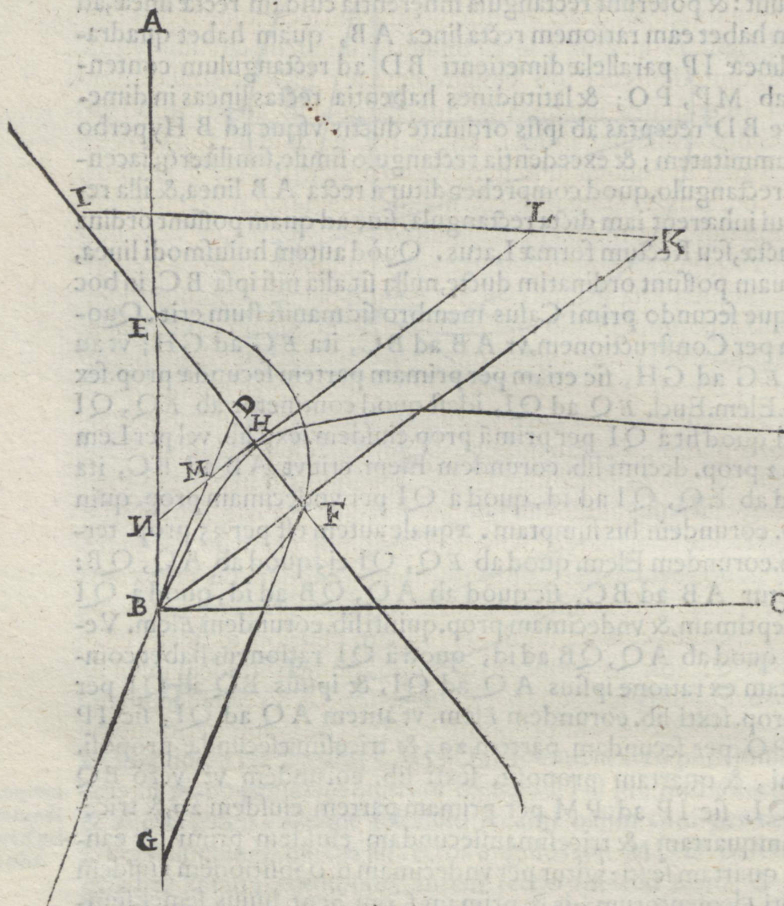
Demonstratio secundi membri primi casus.

Basis quidem est circulus L M N O, Summitas verò punctum I, sectus sit plano per axim faciente triangulũ I O M; sectus autem sit & altero plano, nempe subiecto secanti basim coni per rectam L D N lineam iacentem ad rectos angulos ipsi M D O basi trianguli per axem; communis autem sectio subiecti plani, & plani M I O, idest per vigesimamsecundam definitionem huius, ipsius L B N conicæ sectionis dimetiens, ipsa scilicet D B producta ad partes B, coincidit ipsi O I lateri trianguli O I M ad signum A: erit Hyperbole ipsa L B N conica Sectio per ante demonstratum primum Elementum conicum; cuius Summitas quidem est punctum

ctum B per vigesimamtertiam definitionem huius: dimetiens verò BD, ad quam ordinatè ductæ faciunt rectum angulum per vigesimamquintam definitionem huius, & ipsi LDN per secundam partem vigesimæoctauæ propositionis primi lib. Elem. Eucl. parallelæ sunt: & poterunt rectangula inhęrentia cuidam rectæ lineæ, ad quam habet eam rationem recta linea AB, quam habet quadratum lineæ IP parallelæ dimetienti BD ad rectangulum contentum ab MP, PO; & latitudines habentia rectas lineas in dimetiente BD receptas ab ipsis ordinatè ductis vsque ad B Hyperbolis Summitatem; & excedentia rectangulo simile, similiterq; iacente ei rectangulo, quod comprehenditur à recta AB linea, & illa recta, cui inhærent iam dicta rectangula, siue ad quam possunt ordinatè ductæ, seu Rectum formæ Latus. Quòd autem huiusmodi linea, ad quam possunt ordinatim ductę, nulla sit alia nisi ipsa BC, in hoc quoque secundo primi Casus membro sic manifestum erit. Quoniam per Constructionem, vt AB ad BC, ita EG ad GH; vt autem EG ad GH, sic etiam per primam partem secundæ prop. sexti lib. Elem. Eucl. EQ ad QI, idest quod continetur ab EQ, QI ad id, quod fit à QI per primã prop. eiusdem sexti lib. vel per Lemma 22 prop. decimi lib. eorundem Elem. erit vt AB ad BC, ita quod ab EQ, QI ad id, quod à QI per vndecimam prop. quinti lib. eorundem bis sumptam. æquale autem est per 35 prop. tertij lib. eorundem Elem. quod ab EQ, QI ei, quod ab AQ, QB: vt igitur AB ad BC, sic quod ab AQ, QB ad id, quod à QI per septimam, & vndecimam prop. quinti lib. eorundem Elem. Verùm quod ab AQ, QB ad id, quod à QI rationem habet compositam ex ratione ipsius AQ ad QI, & ipsius BQ ad QI per 23 prop. sexti lib. eorundem Elem. vt autem AQ ad QI, sic IP ad PO per secundam partem 29, & tricesimæsecundæ proposi. primi, & quartam proposit. sexti lib. eorundem vt verò BQ ad QI, sic IP ad PM per primam partem eiusdem 29, & tricesimamquartam, & tricesimamsecundam eiusdem primi, & eandem quartam sexti: igitur per vndecimam propositionem eiusdem quinti Elementorum bis, & primam Com. Sent. huius semel sumptam AB ad BC eam habet rationem, quæ componitur ex ratione, quam habet IP ad PM, & ea, quam habet IP ad PO; idest eam, quam habet quod fit ab ipsa IP quadratum ad rectangulum, quod ab ipsis MP, PO continetur per 23 prop. sexti, & 11 quinti

lib. eorundē Elem. Est autē per Constructionē I P parallela ipsi AD. Transuersū igitur formę Latus est A B, Rectū verò B C per superiùs demōstratū primū Elem. conicū, eiusq; definitiones. Patet itaq; ĩ hoc quoq; secūdo primi Casus mēbro factū esse qđ q̄ritur.

Cōclusio secundi membri primi casus.



Secundus casus.

Expositio.

Determinatio.

Non sit autem datus angulus rectus, & sint datæ rectæ lineę terminatæ A B, & B C ad rectos angulos iunctę: datus autem angulus sit æqualis angulo A B D. Oportet igitur describere Hyperbolem, cuius dimetiens quidem sit A B, Rectum verò latus B C, du-

BC, ductæ autem ordinatim ad dimetientem faciant angulum æqualem angulo ABD. Secetur itaque per decimam propositionem primi lib. Elementorum Euclid. AB per medium ad signum E, & super BE linea describatur per tertiam petitionem eiusdem semicirculus BFE, & per ante demõstratum secundum huius Elementi Lemma ducatur FG à conuexa semicirculi circunferentia ad EB dimetientem extra semicirculum productam parallela ipsi BD, faciensque rationem eius, quod fit ab FG ad id, quod ab EG, GB continetur eandem rationi BC ad duplam ipsius BE, hoc est ad BA: quam quidem rationem ipsius BC ad BA oportet in hoc secundo Casu non esse maioris inæqualitatis. quo facto coniungatur per primam petitionem primi libri Element. Euclid. FDE recta linea, quæ producatur per secundam petitio. eiusdem ad vtramque partem interminatè. deinde per 13 propositionem sexti libri eorundem inter ipsas FE, ED media proportionalis inueniatur EH, cuius extremum H necessariò cadet inter signa DF per præcedens tertium huius Elementi Lemma subinde ponatur per 3. propositionem primi libri eorundem Elemento. EI, ęqualis ipsi EH. ducaturq; per primam petitionem eiusdem BF, quę per secundam petitionem eiusdem producatur in partem F interminatè faciens angulos ad signum F rectos per tricesimamprimam tertij, & tertiamdecimam propositionem primi lib. Elemen. Euclidis. posthęc fiat per 44 propositionem eiusdem bis sumptam ei, quod fit ab FB quadrato æquale rectangulum contentum ab HF, FK. postea coniungantur per primam petition. eiusdem IK. & per H ducatur per vndecimam propositionem eiusdem ipsi IF ad rectos angulos HL, quę per Cõstructionem, & tertiãdecimam & tricesimamsecundam propositionem, & quintam petitionem primi libri Elementorum Euclid. secabit ipsam IK in puncto L: producatur autem per secundam petitionem eiusdem ex altera parte quousque secet etiam ipsam BD in puncto M, & ipsam AB in puncto N. secabit enim eas quoque necessariò, sin minus, neque etiam BK ipsi LN per Constructionem, & vicesimam octauam prop. primi lib. eorundem Elem. parallela ipsas secaret per vltimam definitionem, & tricesimam propositionem eiusdem primi, quod esset contra Constructionem. Post hoc duabus datis rectis lineis terminatis ad rectos angulos inuicem iunctis IH, HL, describatur vt superiùs in primo Casu Hyperbole, cuius dimetiens quidem sit

Cõstructio.

In hoc errauit Apollonius.

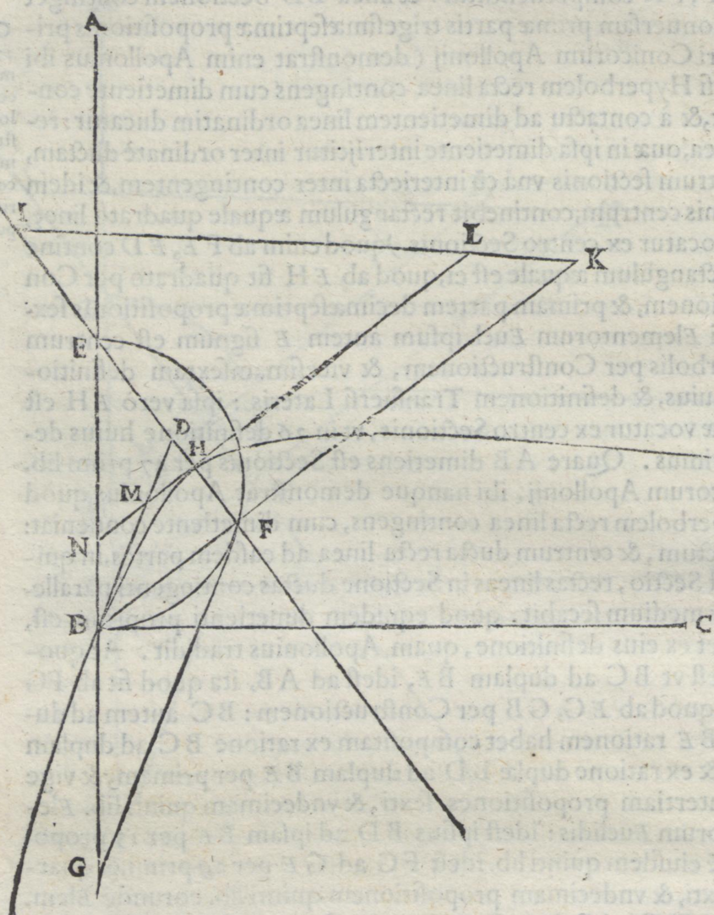
sit IF, Transuersum autem Latus IH, Rectum verò HL, ductę autem ordinatim à Sectione ad dimetientem rectum angulum efficientes possint rectangula inhærentia lineæ *H*L, & latitudines habentia lineas in dimetiente receptas ab ipsis ordinatè ductis vsque ad H Summitatem Sectionis; & excedentia forma simili ei formę, quæ ab IH, HL continetur. Transibit itaque sectio hæc Hyperbole per signum B per primum *E*lementum conicum supra demõstratum, æquale enim est ex Constructione quod fit à BF ei, quod

ab

ab HF, FK comprehenditur: & linea BD Sectionem continget per Conuersam primæ partis trigesimæseptimæ propositionis primi libri Conicorum Apollonij (demonstrat enim Apollonius ibi quòd si Hyperbolem recta linea contingens cum dimetiente conueniat, & à contactu ad dimetientem linea ordinatim ducatur: recta linea, quæ in ipsa dimetiente interijcitur inter ordinatè ductam, & centrum sectionis vnà cũ interiecta inter contingentem, & idem sectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato lineę, quæ vocatur ex centro Sectionis.) quod enim ab F E, E D continetur rectangulum æquale est ei, quod ab E H fit quadrato per Constructionem, & primam partem decimæseptimæ propositionis sexti libri Elementorum Eucl. ipsum autem E signum est centrum Hyperbolis per Constructionem, & vicesimamsextam definitionem huius, & definitionem Transuersi Lateris: ipsa verò E H est ea, quæ vocatur ex centro Sectionis, vt in 26 definitione huius declarauimus. Quare A B dimetiens est Sectionis per 47 primi lib. Conicorum Apollonij. ibi nanque demonstrat Apollonius quòd si Hyperbolem recta linea contingens, cum dimetiente conueniat: per tactum, & centrum ducta recta linea ad easdem partes, in quibus est Sectio, rectas lineas in Sectione ductas contingenti parallelas per medium secabit. quod equidem dimetienti proprium est, vt patet ex eius definitione, quam Apollonius tradidit. At quoniam est vt B C ad duplam B E, idest ad A B, ita quod fit ab FG ad id, quod ab E G, G B per Constructionem: B C autem ad duplam B E rationem habet compositam ex ratione B C ad duplam B D, & ex ratione duplæ B D ad duplam B E per primam, & vigesimamtertiam propositiones sexti, & vndecimam quinti lib. Elementorum Euclidis: idest ipsius B D ad ipsam B E per 15 propositionẽ eiusdem quinti lib. idest F G ad G E per 29 primi, & quartam sexti, & vndecimam propositionem quinti lib. eorundẽ Elem. habebit B C ad B A rationem compositam ex ratione B C ad duplam ipsius B D, & ex ratione F G ad G E per vndecimam quinti lib. Elemen. & primam Com. Sent. huius bis sumptam. quare quod etiam ab F G ad id, quod ab E G, G B eam habet rationem, quæ componitur ex ratione B C ad duplam B D, & ex ratione F G ad G E per eandem vndecimam. habet autem ipsummet, quod fit ab FG ad id, quod continetur ab E G, G B etiam rationem compositam ex ratione F G ad G E, & ratione F G ad G B

per

Conuersam 37 prop. primi li. Conicorum Apollonij demõstrat Fed. Cõmãdinus in commentario illius propositionis.



per 23 prop. sexti lib. Elemen. Eucl. ratio igitur composita ex ratione BC ad duplam BD, & ratione FG ad GE eadem est rationi compositæ ex ratione FG ad GE, & ex ratione FG ad GB per eandem vndecimam quinti lib. Elem. Communis demum auferatur ratio FG ad GE. remanebit igitur vt BC ad duplam BD, sic FG ad GB per tertiam Com. Sent. primi lib. Elem. Eucl. Verùm vt FG ad GB, sic MB ad BN per propositiones 29, & 32 primi, & quartam sexti lib. eorundem Elem. sicut igitur BC

ad

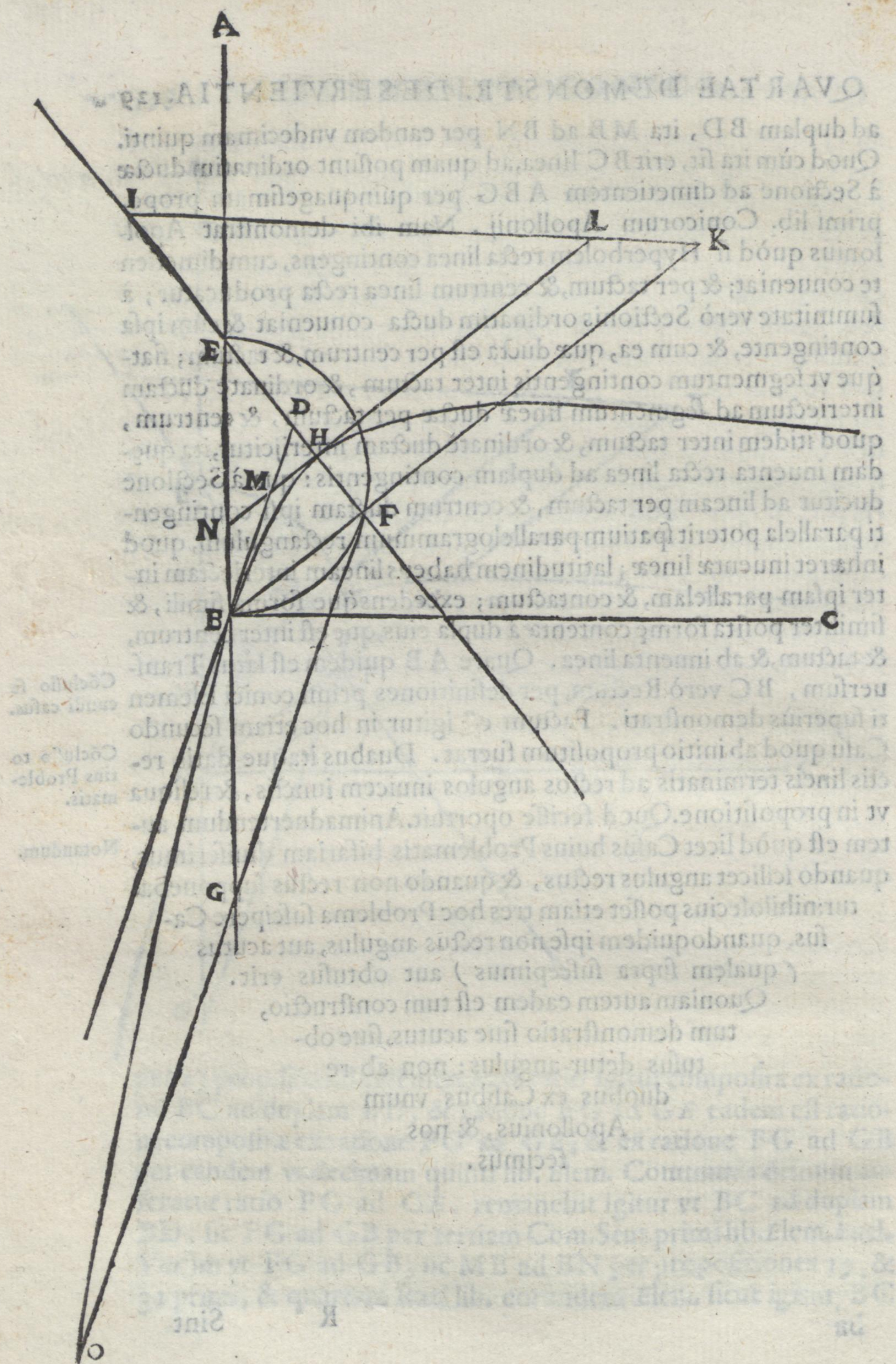
ad duplam BD, ita MB ad BN per eandem vndecimam quinti. Quod cùm ita sit, erit BC linea, ad quam possunt ordinatim ductæ à Sectione ad dimetientem ABG per quinquagesimam propo. primi lib. Conicorum Apollonij. Nam ibi demonstrat Apollonius quòd si Hyperbolem recta linea contingens, cum dimetiente conueniat; & per tactum, & centrum linea recta producatur; à summitate verò Sectionis ordinatim ducta conueniat & cum ipsa contingente, & cum ea, quæ ducta est per centrum, & tactum; fiatque vt segmentum contingentis inter tactum, & ordinatè ductam interiectum ad segmentum lineæ ductæ per tactum, & centrum, quod itidem inter tactum, & ordinatè ductam interijcitur, ita quędam inuenta recta linea ad duplam contingentis: quæ à Sectione ducitur ad lineam per tactum, & centrum ductam ipsi contingenti parallela poterit spatium parallelogrammum rectangulum, quod inhæret inuentæ lineæ; latitudinem habens lineam interiectam inter ipsam parallelam, & contactum; excedensque forma simili, & similiter posita formę contentæ à dupla eius, quę est inter centrum, & tactum, & ab inuenta linea. Quare AB quidem est latus Transuersum, BC verò Rectum, per definitiones primi conici Elementi superiùs demonstrati. Factum est igitur in hoc etiam secundo Casu quod ab initio propositum fuerat. Duabus itaque datis rectis lineis terminatis ad rectos angulos inuicem iunctis, & reliqua vt in propositione. Quod fecisse oportuit. Animaduertendum autem est quòd licet Casus huius Problematis bifariam diuiserimus, quando scilicet angulus rectus, & quando non rectus supponebatur: nihilosecius posset etiam tres hoc Problema suscipere Casus, quandoquidem ipse non rectus angulus, aut acutus (qualem supra suscepimus) aut obtusus erit.

Cōclusio secundi casus.

Cōclusio totius Problematis.

Notandum.

Quoniam autem eadem est tum constructio, tum demonstratio siue acutus, siue obtusus detur angulus: non ab re duobus ex Casibus vnum Apollonius, & nos fecimus.


A
I
L
K
E
D
H
M
F
N
B
C
G
O

Sint enim vt ſuperiùs datæ rectæ lineę AB, BC terminatæ ad rectos angulos inuicem iunctæ, ſitq́; datus angulus obtuſus, & opus ſit facere quod in Problemate quæritur. Si igitur ad datam rectam lineam AB, datumque in ea punctum B, dato angulo obtuſo per viceſimamtertiam propoſitionem primi lib. Elemen. Eucl. æqualis angulus rectilineus conſtituatur, ita vt recta linea ipſum conſtituens in partem B producta cadat intra rectum ABC angulum, non ſecus ac in ſuperiori ſecundi Caſus figura linea BD. fiantque reliqua vt in ipſo ſecundo Caſu, producaturq́; FG in partem G donec per decimamoctauam propoſitionem primi lib. Conicorum Apollonij Sectioni occurrat, verbi gratia in puncto O: erit ipſa GO ordinatè ducta ad BG dimetientem, faciens angulum OGB obtuſum æqualem per Conſtructionem, & viceſimamnonam propoſitionem primi lib. Elemen. Eucl. angulo dato, cæteraque ſic ſe habebunt, vt in ſecundo Caſu.

Digreſsio contra Apollonium.



HOC ita declarato, nunc de mendis, defectibus, ac falſitatibus, quæ in præſenti Problemate apud Apollonium leguntur, ſermo nobis ſit. & primùm quidem loca illa, in quibus litera mendosè legitur indicabo: ſecundò quæ ab Apollonio prætermiſſa ſint, dicam: tertiò quæ ab eodem falſa dicantur oſtendam; duobus attamen priùs adnotatis; primò quòd characteres alphabetici figurarum Apollonij, quos in hoc ſermone citabimus, non reſpondent characteribus noſtrarum figurarum: quoniam Apollonius non ſeruauit ordinem alphabeticum, quem nos diligenter in noſtris operibus obſeruamus, vt Conſtructionis ordinem aperiat; ſecundò ꝙ Apollonius tribus tantùm literis rectangula nominat. Cùm itaq; totam primi caſus Conſtructionem feciſſet Apollonius demonſtrationem ipſam aggrediens, habet hæc verba. *Quoniam igitur conus, cuius baſis eſt circulus GH, & vertex F, ſecatur plano ad FGH triangulum erecto, quod facit ſectionem circulum: ſecatur autem & altero plano ſubiecto, & reliqua.* quæ porrò verba (meo quidem iudicio) ſic legenda, corrigendaq́; ſunt. *Quoniam igitur conus, cuius baſis circulus GH, & vertex F, ſecatur plano per axem faciente triangu-*

Correctio Apollonij.

Not. primũ.

Not. ſecũdũ.

De mendis.

Primũ mendum.

lum FGH: secatur autem & altero plano subiecto, &c. hæc enim debet esse vera loci illius lectio, quippequæ à duodecima propositione libri eiusdem omnino dependet. Rursus in fine demonstrationis eiusdem leguntur hæc verba. *Quare AB ad BC rationem compositam habet ex ratione FO ad OG, & ex ratione FO ad OH: hoc est ex ratione quadrati FO ad rectangulum GOH. Est igitur vt AB ad BC, ita quadratum* FO *ad GOH rectangulum. atque est* FO *parallela ipsi AD &c.* quæ nimirum verba sic esse legenda censeo. *Quare AB ad BC rationem habet compositam ex ratione FO ad OG, & ex ratione FO ad OH: hoc est rationem quadrati FO ad rectangulum GOH. atque est FO parallela ipsi AD &c.* Nam falsum quidem est dicere quod AB ad BC rationem habet compositam ex ratione quadrati FO ad GOH rectangulum, quoniam ratio non ex vna ratione, sed ex duabus componi dicitur: illa autem verba *est igitur vt AB ad BC &c.* prorsus eo in loco superuacanea sunt. si enim litera rectè legatur, illud conclusum iam, atque dictum est.

Secundum mendum.

Præterea construens secundum casum Apollonius ait *Secetur AB per medium in D, & in linea AD describatur semicirculus A*FD, *& ducatur quædam recta linea* FG *in semicirculum parallela ipsi A*H, *faciensq; rationem quadrati, &c.* quæ verba sic legantur. *Secetur AB per medium in D, & in linea AD describatur semicirculus A*FD, *& ducatur quædam recta linea* FG *à conuexa semicirculi circunferentia ad AD dimetientem extra semicirculum productam parallela ipsi AH, faciensq; rationem &c.* linea enim FG non ducitur à dimetiente in semicirculum, sed à conuexo circunferentiæ ad partem dimetientis extra semicirculum productam. quandoquidem inuento priùs in semicircunferentia puncto F, per illud FG parallela ipsi AH ducitur, vt ex Constructione secundi Lemmatis huius Elementi patet. In his igitur tribus locis apud Apolonium præsens problema (meo quidem iudicio) mendosè legitur. Et nil mirum quidem quòd hæc tria menda in hac Apollonij propositione reperiantur, quandoquidem multæ etiam aliæ propositiones in exemplari græco, quod apud Commandinum erat, mendosè leguntur, vt ipsemet Commandinus attestatur in Latina ipsius Apollonij versione corrigens, ac restituens multa loca, quippequæ (vt ipse ait) corrupta in græcis Codicibus erant: vt apud eum cuilibet videre licet in eius scholijs, quæ in Apollonium

Tertium mēdum.

nium ſcripſit : videlicet in propoſitionibus quinquageſimaſecunda libri ſecundi : vigeſimaquarta , viceſimaquinta, triceſimaſexta , quinquageſimaquinta libri tertij : necnon triceſimaoctaua , quadrageſimaprima , quadrageſimaquinta , & quinquageſimaquinta libri quarti : ac demum in hac eadem quinquageſimatertia libri primi , in qua preter iamdicta tria menda à nobis reſtituta (quæ tamen ipſe nequaquam adnotauit , licet non parui momenti ſint) duos alios locos corruptos legi dicit , eoſque ſic reſtituit . Nam in propoſitione quidem , vbi legitur *Inuenire in linea producta Coni Sectionem* , *quæ* Hyperbole *dicitur* ait ſuperuacanea eſſe illa verba *in linea producta* quæ nihilominus neceſſaria mihi videntur . quia in ipſa producta linea (vt ex iam demonſtratis à nobis perſpicuè apparet) reuera inuenienda eſt Hyperbole , cuius ipſa producta recta linea dimetiens eſſe debet , quemadmodum ipſe Apollonius mox rem meliùs declarans ſubiungit *ita vt producta ſit dimetiens Sectionis*: In Conſtructione verò ſecundi Caſus Problematis , vbi in Codice græco verba Apollonij ſic leguntur *faciensq́; rationem quadrati* F G *ad rectangulum* D G A *eandem,quam habet* A C *ad* A D ibi reuera legendum eſt,vt rectè Commandinus correxit *faciensq́; rationem quadrati* F G *ad rectangulum* D G A *eandem*, *quam habet* A C *ad duplam ipſius* A D quemadmodum ex ijs, quæ apud ipſum Apollonium ibi ſequuntur, & ex Conſtructione noſtra ipſius ſecundi Caſus perſpicuum eſt. Atque hæc quidem de mendis breuiter dicta ſint. Conſequens autem eſt defectus explicare . Cùm igitur Conſtructio præſentis Problematis duos (vt ſuperiùs vidimus) habeat Caſus, vnumquidem quando rectus eſt datus angulus, alterum verò quando non rectus exiſtit : quorum caſuum primus adhuc duo membra ſortitur , alterum quidem quando pars dimetientis in altero circuli ſegmento reſecta eandem habet rationem ad reliquam eiuſdem dimetientis partem in reliquo circuli ſegmento reſectam , quam habet A B data linea ad B C lineam datam ; reliquum verò quando iam dicta reſecta pars ad iamdictam reſectam partem habet minorem rationem quàm A B data ad B C datam : ex his vtique duobus membris ſecundum tantùm Apollonius declarauit , in eoque propoſitum demonſtrauit : primum autem prorſus in-

Quartũ mẽdũ Apollonij, quod Cõmandinus ẽt adnotauit.

De defectib. Apollonij.

indeclaratum reliquit. id enim vnico verbo tetigit dicens. *Quòd si vt AB ad BC, ita fuerit EK ad KL, vtemur puncto L,* hoc est producendo per punctum L parallelam ipsi ABD, construemus cætera, quæ demonstrationi sunt necessaria, propositumque demonstrabimus. quod cùm dixisset, mox ad secundum membrum accessit subiungens, *Sin minus, fiat vt AB ad BC, ita EK ad minorem ipsa KL, quæ sit KM, &c.* Vnde manifestum est quòd omiserit Apollonius ibi cuncta ea, quæ à nobis in primo membro primi Casus constructa, demonstrataque sunt. quod equidem non ab re fecisset si primi, secundique membri eadem omnino constructio, demonstratioque foret. quoniam autem tam constructio, quàm demonstratio primi membri discrepat multis à constructione, demonstrationeque membri secundi: idcirco non erant prorsus omittendæ, sed compendiosè potiùs declarandæ, vt earum discrepantia innotesceret. Hæc sunt ea, quæ prætermisit Apollonius. de defectibus igitur hactenus. Modò reliquum est duas, quas commisit falsitates ostendere. Prima quidem falsitas continetur his verbis: *Sit datus angulus primùm rectus: & ex linea AB planũ attollatur erectum ad subiectum planum, in quo circa lineam AB circulus describatur AEBF, ita vt pars dimetientis circuli, quæ in segmento AEB comprehenditur ad partem comprehensam in segmento AFB, non maiorem rationem habeat quàm AB ad BC. & secetur AEB circunferentia per medium in E, ducaturq; à puncto E ad lineam AB perpendicularis EK, quæ producatur ad L: ergo EL dimetiens est circuli. Quòd si vt AB ad BC, ita fuerit EK ad KL, vtemur puncto L: sin minùs, fiat vt AB ad BC, ita EK ad minorẽ ipsa KL, quæ sit KM, &c:* Videtur enim Apollonius ex his verbis velle quòd circa lineã AB describatur circulus ita, vt pars cuiuslibet dimetientis circuli in AEB segmento comprehensa ad reliquam sui partem comprehensam in segmento AFB, non maiorem rationem habeat, quàm AB ad BC. quod nimirùm fieri non potest, quandoquidem infinitæ in eodem circulo dimetientes protrahi possunt rectam AB lineam secantes, ex quibus quædam inuenientur, quæ maiorem etiam rationem habebunt quàm AB ad BC. Quòd autem hæc sit Apollonij mens hinc patet, quia subdidit illa verba. *& secetur AEB circunferentia per medium in E, ducaturq; à puncto E ad lineam AB perpendicularis EK, quæ producatur ad L: ergo EL dimetiens est circuli.* ex his etenim verbis indicat Apollonius quòd supponat

De falsitatibus ab eodẽ commissis.

Prima falsitas.

iam factum esse, quod iussit; esse videlicet descriptum circulum circa AB lineam ita, vt cuiuslibet dimetientis pars in AEB segmento comprehensa ad reliquam sui partem in segmento AFB contentam non habeat maiorem rationem quàm AB ad BC: velitq; vt secetur AEB circunferentia per medium in E, ducaturque à puncto E ad lineam AB perpendicularis EK, quæ producta ad L, sit (per vicesimamnonam propositionem tertij, & quintam propositionem, & quartam petitionem, & vicesimamsextam propositionem primi, & Corollarium primæ prop. tertij lib. Elementorum Eucl.) dimetiens circuli; & cum sit dimetiens hac ratione sui partes à recta AB linea resectæ subeant iam dictã affectionem; quippecùm hoc scilicet artificio circulum circa AB lineam descriptum supponat, vt cuiuslibet suarum dimetientium partes ipsi iam dictæ affectioni subijciãtur. quod apertissimè constat, cùm statim subinferat, *quòd si vt AB ad BC ita fuerit EK ad KL, vtemur puncto L: sin minùs, fiat vt AB ad BC ita EK ad minorẽ ipsa KL, quæ sit KM.* ecce quòd statim postquam probauit Apollonius lineam EL esse dimetientem, supponens EK ad KL non habere maiorem rationem quàm AB ad BC: subiunxit quod si fuerit vt AB ad BC, ita EK ad KL, vtetur puncto L: si verò (quod reliquum est) EK ad KL minorem habuerit rationem quàm AB ad BC, faciet vt AB ad BC, sic EK ad minorem ipsa KL, quæ sit KM. Nonne igitur falsitas hæc manifesta est? Quum enim in eodem circulo (vt iam diximus) plures duci possint dimetientes ipsam AB secantes, ex quibus alia quidem habebit eandem rationem, quam habet AB ad BC, alia verò minorem, alia demum maiorem; quonampacto scire potest Apollonius quòd ipsa EL sit ea dimetiens, cuius pars EK ad partem KL non minorem rationem, sed vel eandem, vel maiorem habet? nisi supponat quòd circulus ita circa AB lineam descriptus sit, vt omnes eius dimetientes hoc patiantur? quod vtique falsissimum est, nulloque modo fieri potest. Quòd si supponat Apollonius dimetientem EL eam esse, quam quærimus, ita scilicet inuentam quemadmodum nos in primo huius Problematis Lemmate docuimus: manifestum est ex Constructione ipsius Lemmatis quòd ipsa EL ipsam AEB circunferentiam per medium secat, necnon ipsam AB rectam lineam ad rectos angulos, per mediumque dispescit. Ad quid igitur Apollonius circunferentiam AEB per medium in E secat, & ipsam

ſam EL ipſi AB perpendicularem ducit; niſi ad probandum q̃ linea EL dimetiens ſit, vt ex hoc ſtatim conſequatur iuxta iam dictam falſam eius ſuppoſitionem quòd EK ad KL non maiorem rationem habet, quàm AB ad BC? etenim ſat eſſet dicere, deſcriptus itaque ſit circa AB lineam circulus ita, vt ſuæ dimetientis pars EK ad reliquam KL partem habeat non maiorem rationem quàm AB ad BC. talis enim dimetiens eo artificio, quo nos docuimus, reperta neceſſariò iam dictas facit ſectiones. Hæc igitur eſt prima falſitas Apollonij. Secunda verò maior adhuc eſt, ac euidentior, quam profectò continent hæc verba. *Non ſit autem datus angulus rectus: ſintq́ rectæ lineæ datæ AB, AC: & datus angulus ſit æqualis ei, qui BAH continetur. Oportet igitur deſcribere Hyperbolem, ita vt eius dimetiens ſit AB, & Rectum Latus AC: ductæ verò ordinatim ad dimetientem in angulo BAH applicentur. Secetur AB per medium in D: & in linea AD deſcribatur ſemicirculus AFD. & ducatur quædam recta linea FG in ſemicirculum parallela ipſi AH; faciensq́ rationem quadrati FG ad rectangulum DGA eandem, quam habet CA ad duplam AD, &c.* Vbi vult Apollonius quòd ducatur quædam FG recta linea inter ſemicirculi circunferentiam, & externam dimetientis AD productæ partem, ipſi AH lineæ parallela, cuius videlicet FG parallelæ quadratum habeat ad rectangulum à lineis DG, GA contentum eandem rationem, quam habet data linea CA ad AB datam lineam. Non determinat autem Apollonius qualis nam debeat eſſe ratio ipſius AC ad ipſam AB; vtrum ſcilicet æqualitatis, an inæqualitatis maioris, vel minoris. vnde quod fieri præcipit Apollonius erit Problema quoddam indeterminatum, ac impoſſibile. quandoquidem (vt in ſecundo huius Problematis Lemmate prope finem adnotauimus) fieri non poteſt, vt quadratum lineę FG ſit vnquam maius rectangulo à lineis DG, GA contento, ſed vel ipſi æquale, vel ipſo minus erit. Quare ſi ratio lineæ CA ad lineam AB fuerit maioris inæqualitatis, verbi gratia dupla, ſeu tripla, vel quadrupla, vel huſucemodi quædam alia: incaſſum laboraret quicunque id, quod ab Apollonio iuſſum eſt, efficere conaretur. Debebat igitur Apollonius poſt illa verba, *quam habet CA ad duplam AD*, ſubiungere, *quæ quidem ipſius AC ad duplam AD ratio non ſit maioris inæqualitatis*, vt quod dixerat, hac determinatione poſſibile redderetur. Cùm autem nullam ſubiunxerit conditionem, nulli dubium id ab eo præcipi,

Secunda falſitas.

cipi,quod fieri minimè poteſt. Nam Euclides etiam cùm in viceſimaſecunda propoſitione primi libri Element. dixiſſet, *Ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtruere*, ni mox addidiſſet, *Oportet autem duas earum reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas*, dubio procul illud Problema indeterminatum eſſet,ac impoſſibile. Quapropter hanc etiam ſecundam Apollonij falſitatem arbitror omnibus iam eſſe conſpicuam. Hæc autem in præſentia de mendis, defectibus, ac falſitatibus, quæ in hoc Problemate apud Apollonium leguntur, breuiter dicta ſufficiant. Verumenimuero tribus iam Apollonij Conicis Elementis, videlicet duodecimo,viceſimoprimo, & quinquageſimotertio primi libri ſic illuſtratis: nunc reliquum eſt, vt ad inſtitutum noſtrum reuertamur, Problemaque ab initio nobis propoſitum iuxta doctrinam Apollonij demonſtremus. Repetatur igitur hìc Problema, quod à principio propoſuimus.

Exẽplum in Euclide.

Epilogus digreſſionis.

PROBLEMATIS PRAECIPVI DEMONSTRATIO QVARTA ſecundùm Apollonium.

DVAS in eodem plano deſcribere lineas alteram rectam, & alteram curuam,quæ nunquam adinuicem coincidant, etiam ſi in infinitum protrahantur: & quantò longiùs producuntur, tantò ſibijnuicem propiores euadant.

Propoſitio.

Sint duæ rectæ lineæ AB, AC quemlibet angulum continentes eum, qui eſt ad ſignum A. & ſuſcipiatur intra iam dictum angulum quodcunque ſignum D, à quo ad ſignum A ducatur per primam petitionem primi libri Elementorum Euclidis recta linea. quippequę vel diuidet angulum BAC per medium, vel non per medium. Diuidat eum primò per medium. & producatur per ſecundam petitionem eiuſdem ipſa DA in partem A.

Expoſitio.

Diuiſio caſuum Problematis.

Primi Caſus constructio.

& per tertiam propositionem eiusdem primi fiat A E æqualis ipsi A D. & per signum D ducatur per tricesimam primam propositionem eiusdem D F parallela ipsi A B. & per eãdem tertiam primi fiat F C æqualis ipsi A F. & per primam petitionẽ eiusdem ducatur C D, quę per secundam petitionem eiusdem producatur quousq; secet ipsam A B in signo B. secabit enim eam, cùm & D F ipsi parallelam secet ratione sæpe superiùs dicta. Fiat deinde per 44 propositionẽ primi lib. Elemen. Eucl. bis sumptam rectangulum vnũ æquale quadrato lineæ B C. cuius vtiq; rectanguli alterum quidem latus sit ipsa D E, alterum verò recta D G linea ipsi D E ad rectũ angulum iuncta in puncto D. quæ erit in vna recta linea cũ D C, quoniam anguli A D B, A D C recti sunt per Constructionem, & vicesimamnonam, & sextam, & quintam, & vicesimamsextam propositionem, & primam Com. Sent. primi lib. eorundem Elem. quoties opus fuerit sumptas. Productaque demum recta linea E A D in partem D per secundam petitionem primi lib. eorundem vsque ad signum H, describatur per primum Casum quinquagesimæ tertię propositionis primi lib. Conicorũ Apollonij, seu tertij Elementi Conici superiùs demonstrati Hyperbole in eodem plano cum lineis E D, D G iacens, cuius dimetiens quidem sit D H transiens per A centrum Sectionis, summitas autem signum

D ad rectum angulum existens; ordinatè verò ductæ à sectione ad DH eius dimetientem, angulumque facientes æqualem dato angulo ADC recto, possint rectangula inhærentia lineæ DG; & latitudinem habentia rectam lineam in dimetiente DH receptam ab ordinatè ducta vsq; ad summitatem D; & excedentia parallelogrammo rectangulo simili, similiterque iacente ei, quod ab ED, DG continetur rectangulo. Vnde ipsa quidem DG erit Rectum, ipsa verò DE Transuersum formæ Latus. Hæc enim quomodo fiant in illo Elemento demonstrata fuere. Sit igitur talis Hyperbole descripta ipsa IDK. & producantur per secundam petitio. primi libri Elementorum Eucl. rectæ lineæ AB, AC in partes BC. Dico quòd si etiam in infinitum vnà cum ipsa Hyperbole protrahantur, neutra ipsarum vnquam coincidet inflexæ IDK lineæ: & quantò longiùs producuntur, tantò propiùs ipsi IDK lineæ curuę accedunt. Quòd itaque nunquam ipsi coincidant, sic per demonstrationem indirectam ostenditur. Si fieri potest coincidat AC recta ipsi DK inflexæ ad signum K, à quo ducatur per duodecimam propositionem primi lib. Elem. Eucl. ordinatè ad DH dimetientem recta linea, quæ sit KH. erit igitur parallela ipsi CD per primam partem vicesimæoctauæ propositionis primi libri Elementorum Euclidis. angulus enim CDA per Constructionem rectus est, angulus autem DHK similiter est rectus per vicesimamquintam definitionem huius. Quoniam igitur per Constructionem DF parallela est ipsi BA, & CF æqualis ipsi FA: igitur CD æqualis est ipsi DB per primam partem secundæ propositionis sexti libri Elementorum Eucl. Quare quod fit à CB quadratum quadruplum est ei, quod fit à CD per quartam propositionem secundi libri eorundem. & est quod fit à CB per Constructionem æquale rectangulo ab ED, DG contento. igitur quod fit à CD quadratum quarta pars est rectanguli contenti ab ED, DG. est autem eius etiam, quod fit ab ED quarta pars quadratum lineę AD per Constructionem, & per eandem quartam secundi. sicut igitur quadratum ipsius AD ad quadratum ipsius DC, sic per quintamdecimam propositionem quinti libri Elementorum Eucl. quadratum totius ED ad rectangulum ab ED, DG contentum. vt autem quadratum ipsius ED ad rectangulum ab ED, DG comprehensum, sic linea DE ad lineam DG per primam prop. sexti, vel per Lemma 22 prop. decimi

Determinatio.

Primæ partis Problematis Demõstratio.

libri eorundem Elemento. ergo per vndecimam eiusdem quinti, sicut ED ad DG, sic quadratum lineæ A D ad quadratũ lineæ D C. Sed vt quadratũ ipsius A D ad quadratũ ipsius DC, sic quadratum ipsius A H ad quadratum ipsius H K per primam partem vicesimæ secundæ propositionis sexti libri Elementorum Euclidis. linea enim A D ad lineam D C est sicut A H ad HK per Constructionem, & vicesimamnonam propositionem primi, & quartam propositionem sexti libri eorundem. Sicut igitur quadratum lineæ A H ad quadratum lineæ H K, sic per eandem vndecimam quinti linea E D ad DG lineam. Verùm vt E D ad D G, idest Latus formæ Transuersum ad Rectum, ita quod ab EH, H D ad quadratum lineæ H K per vicesimam primam propositionem primi libri Conicorum Apollonij, vel per secundum superiùs demonstratum Conicum Elementum. Et sicut igitur quadratum lineæ A H ad quadratum lineæ H K, sic quod ab E H, H D continetur rectangulum ad idem ipsius H K quadratum per eandem vndecimam quinti. æquale itaque est per primam partem nonæ propositionis eiusdem quinti quod ab E H, H D continetur rectangu-

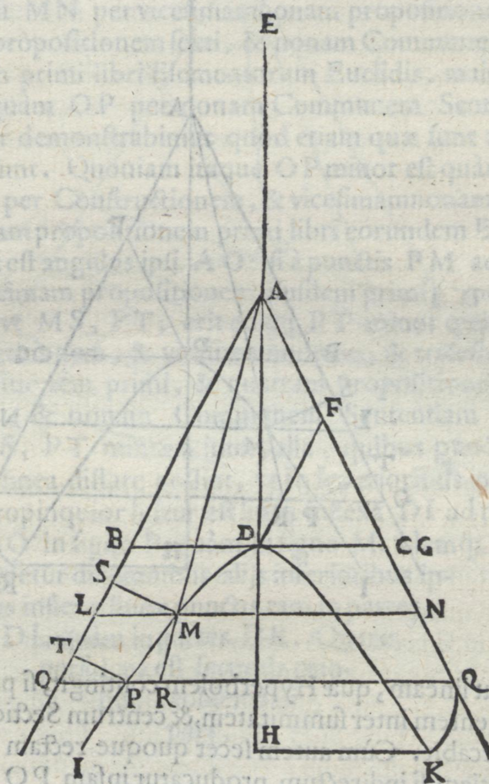
Determinatio.

Primæ partis Problematis Demõstratio.

ctangulum ei,quod ab A *H* fit quadrato,quod est absurdum, quoniam oppugnat sextę propositioni secundi libri Elemento.Euclidis; quippe quæ ostendit quadratum ipsius AH maius esse quàm rectangulum ab EH, HD contentum,quadrato lineę AD. nam fieri non potest vt eędem quantitates ęquales inuicē,& inęquales sint. Non coincidit igitur ipsa AC recta ipsi DK inflexæ etiam si in infinitum producantur. in quocunque enim puncto coincidere ipsi posita fuerit, idem semper absurdum sequetur. Similiter autem demonstrabitur quòd ipsa etiam AB recta,& ipsa DI inflexa in infinitum productæ, nusquam coincident. Quare patet prima quidem Problematis pars. Secunda verò per directam demōstrationem sic ostendatur. Maneant cūcta vt in proxima figura fuere disposita. Dico ꝙ rectæ lineæ AB, AC quantò longiùs in partes BC producētur,tantò ipsi IDK curuæ lineæ propiores fient. Ducantur itaq; per 31 propo.primi libri Elemētorum Euclid. ipsi

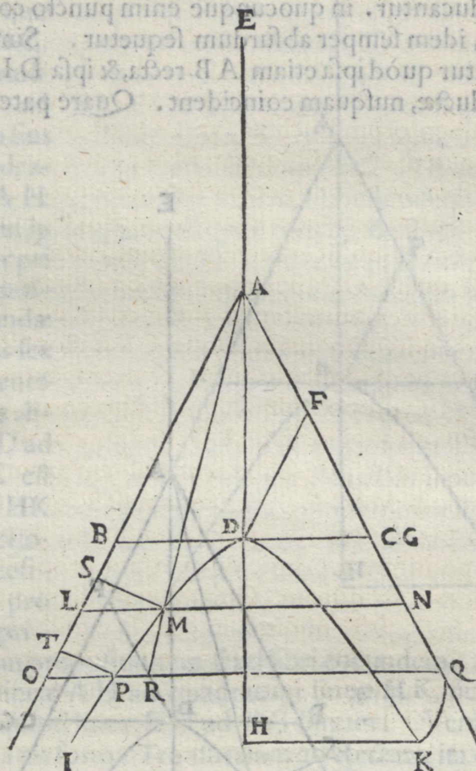
Conclusio primæ partis.

Determinatio secundæ partis.



Constructio secundæ partis.

ipsi B D C tāgēti parallelæ L M N, & O P Q. & per primā petitio nē eiusdē ducatur A M recta linea, quæ per 2. pet. eiusdē producta in partem M, necessariò secabit Sectionem in signo M. aut enim secabit eam, aut tanget: tangere non potest per Corollarium tricesimæprimæ propositionis primi lib. Conicorum Apollonij (quod



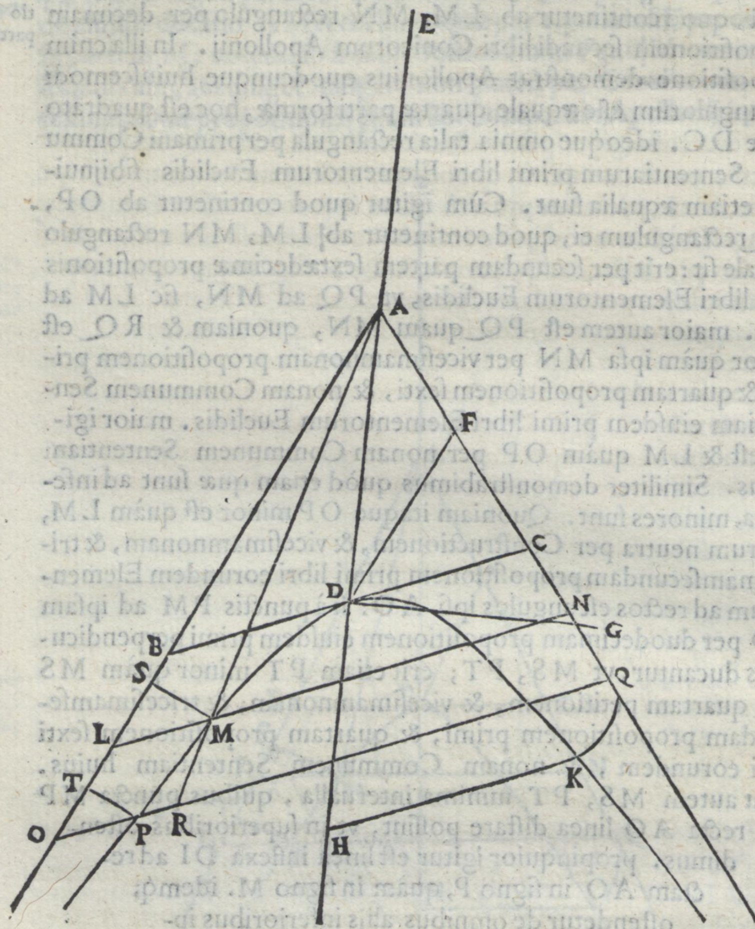
affirmat lineam, quæ Hyperbolem contingit, si producatur secare dimetientem inter summitatem, & centrum Sectionis) ergo necessariò secabit. Cùm autem secet quoque rectam L N lineam, secabit etiam si indirectum producatur ipsam P Q ratione sæpe superiùs allegata. Secet itaque ipsam in puncto R. His ita Con-

structis dico quòd rectangulum contentum ab OP, PQ æquale est ei, quod continetur ab LM, MN rectangulo per decimam propositionem secundi libri Conicorum Apollonij. In illa enim propositione demonstrat Apollonius quodcunque huiuscemodi rectangulorum esse æquale quartæ parti formæ, hoc est quadrato lineæ DC. ideoque omnia talia rectangula per primam Communem Sententiarum primi libri Elementorum Euclidis sibijnuicem etiam æqualia sunt. Cùm igitur quod continetur ab OP, PQ rectangulum ei, quod continetur ab LM, MN rectangulo æquale sit: erit per secundam partem sextædecimæ propositionis sexti libri Elementorum Euclidis, vt PQ ad MN, sic LM ad OP. maior autem est PQ quam MN, quoniam & RQ est maior quàm ipsa MN per vicesimamnonam propositionem primi, & quartam propositionem sexti, & nonam Communem Sententiam eiusdem primi libri Elementorum Euclidis. maior igitur est & LM quàm OP per nonam Communem Sententiam huius. Similiter demonstrabimus quòd etiam quæ sunt ad inferiora, minores sunt. Quoniam itaque OP minor est quàm LM, quarum neutra per Constructionem, & vicesimamnonam, & tricesimamsecundam propositionem primi libri eorundem Elementorum ad rectos est angulos ipsi AO: si à punctis PM ad ipsam AO per duodecimam propositionem eiusdem primi perpendiculares ducantur, vt MS, PT; erit etiam PT minor quàm MS per quartam petitionem, & vicesimamnonam, & tricesimamsecundam propositionem primi, & quartam propositionem sexti libri eorundem, & nonam Communem Sententiam huius. Sunt autem MS, PT minima interualla, quibus puncta MP à recta AO linea distare possint, vt in superioribus ostendimus. propinquior igitur est linea inflexa DI ad rectam AO in signo P, quàm in signo M. idemq; ostendetur de omnibus alijs inferioribus ipsius inflexæ lineæ punctis tam in partes DI, quàm in partes DK. Quare perspicua est secunda quoque Problematis pars.

Demonstratio secundæ partis.

Cõclusio secundæ partis.

Verùm



Secundi casus Constr.& Demõstr.parùm à superioribus differentes.

Verùm si recta DA linea non per medium angulum BAC diuiserit,vt in præsenti figura: construentur, & demonstrabuntur omnia sicut in primo casu his exceptis: primò quòd recta DG non erit in vna recta linea cum ipsa DC: secundò quòd non describetur Hyperbole per primum,sed per secũdum Casum 53 propositionis primi libri Conicorum Apollonij: tertiò ipsam KH ordinatè ductam probabitur esse parallelam ipsi DC contingenti, non

non eo modo, quo in primo Casu probatum fuit, sed per conuersam primæ partis tricesimæsecundæ propositionis primi libri Conicorum Apollonij; quòd scilicet si recta linea conicam Sectionem ad summitatem contingat, ordinatè ductis erit parallela; quæ conuersa quamuis ab Apollonio demonstrata non sit, tamen ex ipsa tricesimasecunda per demonstrationem indirectam facilè probari potest; conuersas enim propositiones ex suis antecedentibus sæpe Mathematici probant: quartò quòd in hoc secundo Casu lineæ LN, OQ, & omnes ipsis parallelæ quandoque possunt ad rectos angulos esse vel ipsi AO, vel ipsi AQ; & tunc in illa parte vbi parallelæ ipsæ perpendiculares fuerint, non sunt quærenda alia breuissima interualla, quoniam in iam dictis parallelis ea sunt. Duas itaque iuxta doctrinam etiam Apollonij eodem in plano descripsimus lineas alteram rectam, & alteram curuam, ipsas nempe AO, DP, vel ipsas AQ, DK, quæ nunquam adinuicem coincidunt, etiam si in infinitum protrahantur: & quantò longiùs producuntur, tantò sibijnuicem propiores euadunt. Quod erat faciendum. Conclusio vniuersalis.

Corollarium Primum.

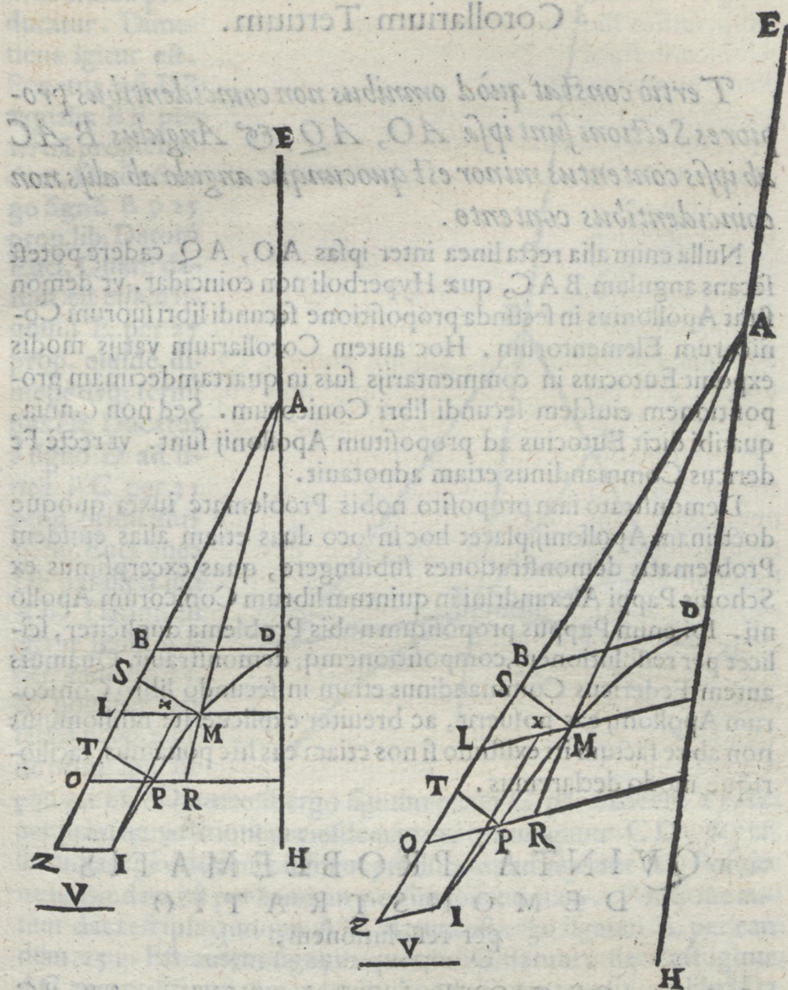
Ex demonstratis manifestum est primò quòd si Hyperbolem ad Summitatem recta linea tangat, & ab ipsa in vtraque dimetientis parte suscipiatur pars æqualis rectæ lineæ potenti quartam partem formæ, seu rectanguli à Recto, & Transuerso lateribus contenti; & à centro Hyperbolis ad sumptos tangentis terminos rectæ ducantur lineæ: erunt non coincidentes Sectioni. & conuersò si dictæ lineæ fuerint Sectioni non coincidentes: partes tangentes inter dimetientem, & non coincidentes receptæ quartam formæ partem poterunt.

Hoc primum Corollarium omnino perspicuum ex iam demonstratis est, nec vlla declaratione indiget.

Corollarium Secundum.

Secundò patet quòd si à quibuslibet Hyperbolicæ lineæ punctis ad non coincidentes rectæ lineæ perpendiculares ducantur: inferiores superioribus minores sunt, & quocunque dato spatio ad minus perueniunt spatium.

Sit enim (exempli gratia) in subscriptis figuris, quæ sunt partes superiorum figurarum datum spatium V. quod vtiq; aut maius, aut minus est quàm LM, aut ipsi æquale. Quòd si maius, vel æquale fuerit: manifestum est ex superioribus quòd OP, necnon TP minus est ipso. Si verò datum V spatium minus quam LM sit. relinquatur per primam propositionem decimi libri Elementorum Euclidis LX minus spatio V. & per punctum X ducatur per tricesimamprimam propositionem primi lib. eorundem Elementorum parallela ipsi SO. quæ per tertiamdecimam propositionem libri secundi Conicorum Apollonij coincidet Sectioni ad vnum punctum. ibi enim demonstrat Apollonius quòd si in loco extra Sectionem inter non coincidentem, & Sectionem intercepta quædam recta linea ducatur alteri non conincidentium parallela: in vno puncto tantùm cum Sectione conueniet. coincidat (verbi gratia) ad signum I, per quod ducatur ipsi LX parallela IZ, quæ necessariò coincidet ipsi LO ad signum Z ratione sæpe superiùs dicta. æqualis igitur est per tricesimamquartam propositionem primi libri Elementorum Eucl. IZ ipsi LX. quare spatium IZ dato V spatio minus est per septimam Com. Sent. huius. Si igitur à puncto I ad rectam AZ lineam perpendicularis ducatur, erit adhuc multò minor dato V spatio per 32, & 19 prop. primi libri eorundem Elem.


E
A
B
D
S
x
L
M
T
O
P
R
Z
I
H
V
E
A
D
B
S
x
L
M
T
O
P
R
Z
I
V
H

Corollarium Tertium.

Tertiò constat quòd omnibus non coincidentibus propiores Sectioni sunt ipsæ AO, AQ, & Angulus BAC ab ipsis contentus minor est quocunque angulo ab alijs non coincidentibus contento.

Nulla enim alia recta linea inter ipsas AO, AQ cadere potest secans angulum BAC, quæ Hyperboli non coincidat. vt demonstrat Apollonius in secunda propositione secundi libri suorum Conicorum Elementorum. Hoc autem Corollarium varijs modis exponit Eutocius in commentarijs suis in quartamdecimam propositionem eiusdem secundi libri Conicorum. Sed non omnia, quæ ibi dicit Eutocius ad propositum Apollonij sunt. vt rectè Federicus Commandinus etiam adnotauit.

Demonstrato iam proposito nobis Problemate iuxta quoque doctrinam Apollonij, placet hoc in loco duas etiam alias eiusdem Problematis demonstrationes subiungere, quas excerpsimus ex Scholijs Pappi Alexandrini in quintum librum Conicorum Apollonij. Ibi enim Pappus propositum nobis Problema dupliciter, scilicet per ressolutionem, compositionemq; demonstrauit. Quamuis autem Federicus Commandinus etiam in secundo libro Conicorum Apollonij eas posuerit, ac breuiter explicuerit: nihilominus non ab re factum iri existimo si nos etiam eas hìc ponamus, faciliorique modo declaremus.

QVINTA PROBLEMATIS DEMONSTRATIO
per ressolutionem.

Expositio.

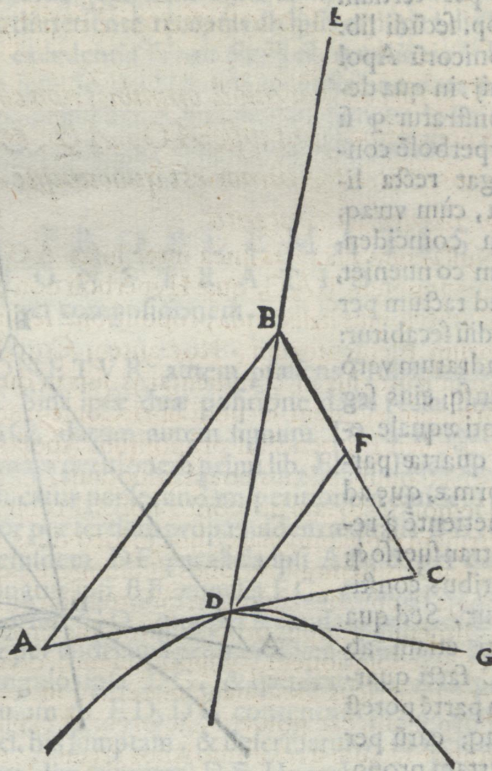


OSITIONE datis duabus rectis lineis AB, BC, & signo D dato: propositum sit describere per D signum Hyperbolem circa non coincidentes AB, BC. Factum itaque sit. Centrum igitur ipsius est signum B. Coniungatur ergo recta linea DB per primam petionem primi lib. Elem. Eucl. & per secnndam petitionem

Determinatio.

Constructio

nem eiusdẽ producatur. Dimetiens igitur est. Ponatur ipsi DB æqualis BE per tertiã prop. eiusdem. Datũ est ergo signũ B ꝑ 25 prop. lib. Datorũ Eucl. Quare datum est etiam signum E per 27 prop. eiusdẽ, dimetiẽtisq; terminus est. Ducatur à signo D ad lineã BC per 31 prop. primi libri Elem. Eucl. linea DF parallela ipsi AB. Datum est igitur signum F per eandem 25. & ponatur per tertiã prop. eiusdẽ primi ipsi BF ęqualis FC. Datum est ergo signum etiam C per eandem 27. & per primam petitionem eiusdem primi coniungatur CD, & per secundam petitionem eiusdem producatur ad signum A. Positione igitur data est per eandem vicesimamseptimam. Positione autem data est ipsa quoque AB. datum est ergo signum A per eandem 25. Est autem signum quoque C datum. data est igitur AC tum positione, tum magnitudine per 26 propositione libri Datorũ Euclidis. eritq; æqualis AD ipsi DC per primã partẽ secundæ prop. sexti lib. Elem. Eucl. & 9 Com. Sẽt. huius, eò ꝙ etiã BF ipsi FC per Constructionem æqualis est. Sit itaq; DG Rectum Latus formæ, quę ipsi ED Transuerso Lateri inhæret. Vtraq; igitur ipsarum AD, DC potest quartam partem rectanguli ab ED, DG cõtenti per secundã partẽ primi Corollarij præcedẽtis prop. Demonstr.



vel

vel per tertiam prop. secũdi lib. Conicorũ Apollonij, in qua demonstratur ꝙ si Hyperbolẽ contingat recta linea, cùm vtraq; non coincidentium conueniet, & ad tactum per mediũ secabitur: quadratum verò vtriusq; eius segmenti æquale erit quartæ parti formæ, quę ad dimetientẽ à recto, transuersoq; lateribus constituitur. Sed quadrati etiam ab A C facti quartam partẽ potest vtraq; earũ per quartam propo. secundi libri Elemen. Eucl. æquale est igitur rectangulum ab E D, D G contentum quadrato ab A C facto per secundam partem nonæ propositionis quinti libri Elementorum Euclidis. Datum autem est quadratum ab A C, datum ergo est etiam rectangulum ab E D, D G. & est data ipsa E D, data est igitur & ipsa G D per secundam partem sextędecimæ, vel primam partem quartædecimæ propositionis sexti libri Elementorum, & secundam propositionem libri Datorum Euclidis. & datur etiam signum G per 27 propositionem libri Datorum. Quoniam igitur positione datis duabus rectis lineis terminatis in eodem plano E D, D G, ad rectos angulos inuicem iunctis; per datum punctum D facta est Sectio Hyperbole, cuius dimetiens quidem est ipsa E D, vertex verò signum D: lineæ autem ordinatè ductæ, ducuntur in dato angulo

gulo

g[ul]o ADB potentes rectangula inhærentia lineæ DG, latitudines habentia lineas in dimetiente receptas ab ipsis ordinatè ductis vsque ad signum D; excedentia forma simili ei, quæ lineis ED, DG continetur: erit ipsa Sectio Hyperbole positione data per ea, quæ in præcedenti propositione demonstrata sunt, ex doctrina primæ, & quartæ, & quartædecimæ propositionis secundi libri Conicorum Apollonij. Quod fecisse oportuit. Conclusio.

SEXTA PROBLEMATIS DEMONSTRATIO
per compositionem.

COMPONETVR autem præsens Problema hoc modo. Sint ipsæ duæ positione datæ rectæ lineæ AB, BC, datum autem signum D. & iungatur per primam petitionem primi lib. Elem. Eucl. DB, & producatur per secundam petitionem eiusdem ad E, ipsiq; DB ponatur per tertiam prop. eiusdem æqualis BE, & ducatur per 31 prop. eiusdem DF parallela ipsi AB, & per candem tertiam primi ponatur ipsi BF æqualis FC, & iungatur per eandem primam pet. primi CD, quæ per secundam pet. eiusdem producatur ad A: & per vndecimã prop. eiusdem primi ipsi DE applicetur ad rectos angulos ipsa DG. & quadrato ab AC ponatur æquale rectangulum ab ED, DG contentum per 44 prop. primi lib. Elemen. Eucl. bis sumptam. & describatur, vt in Ressolutione dicebamus, circa dimetientem DE Hyperbole. Dico ꝙ Problema factum est. Cùm enim æqualis sit BF ipsi FC, æqualis erit & AD ipsi DC per primam partem secundæ prop. sexti lib. Elem. Eucl. & nonam Com. Sent. huius. vtraq; igitur ipsarum AD, DC per quartam prop. secũdi eorundem potest quartam partem quadrati ab AC facti, hoc est rectanguli ab ED, DG contenti, hoc est formæ inhærentis dimetienti ED. Quare per primam partẽ primi Corollarij quartæ Demonstr. libri huius, vel per primam prop. lib. 2 Conicorũ Apoll. ipsæ AB, BC rectæ lineæ cum Hyperbolæ nunquam coincidunt: & per secundum Corollarium eiusdem quartæ demonstrationis, vel per 14 prop. eiusdem secundi Conicorum iam dictæ rectæ lineæ in infinitum productæ ipsi Hyperbolæ semper magis appropinquant. Quod faciendum erat.

Cõstructio. Determin. Demonstratio. Conclusio.

DE

DE DVABVS LINEIS CVRVIS IN EODEM PLANO DESCRIPTIS NVNQVAM COINCIDENTIBVS,

& semper sibi magis appropinquantibus, etiam si in infinitum producantur.

Propositio.



OSITIS duabus Pappi demonstrationibus de linea recta, & curua non coincidentibus, & magis sibi semper appropinquantibus si in infinitum producantur: non erit ab re hoc in loco subscribere quandam etiam aliam demonstrationem Pappi excerptam ex eius Lemmatibus in quintum librum Conicorum Apollonij, qua demonstratur duas Hyperbolas in eodem plano descriptas, in infinitumq; productas nunquam inuicem coire, & semper ad interuallum quolibet interuallo dato minus peruenire. est enim ea demonstratio mutila, mendosaq;, vt Commandinus etiam animaduertit in libro secundo Conicorum Apollonij, vbi eam ipse longo sermone instaurare conatus est. Nos autem breuiori quoadfieri poterit modo eam illustrabimus.

Expositio.

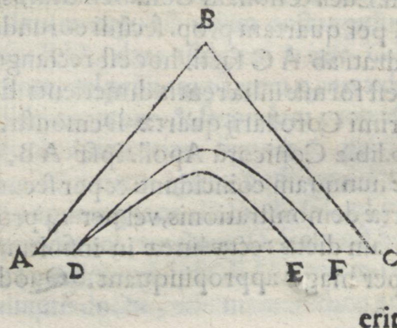
Circa ipsas non coincidentes AB, BC rectas lineas duę Hyperbolę DE, DF describantur.

Determin. primę partis.

Dico eas inuicem non coincidere.

Demonstratio primæ partis.

Nam si fieri potest coincidant ad signum D, p quod in Sectiones ducatur recta linea ADEFC.

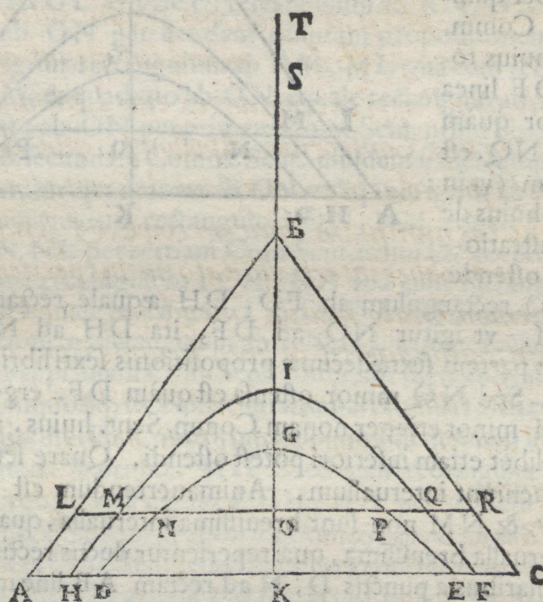


erit propter quidem DE Sectionem linea AD æqualis ipsi FC, propter verò Sectionem DE ipsa AD æqualis ipsi EC per vltimam partem octauæ prop. secundi libri Conicorum Apollonij; (ibi enim demonstrat Apollonius, quòd si Hyperbolæ recta linea occurrat in duobus punctis: producta ex vtraque parte, cum ipsis non coincidentibus conueniet; & lineæ, quæ ex ipsa abscissæ inter Sectionem, & non coincidentes interijciuntur, æquales erunt.) Quare per primam Comm. Sent. primi libri Elementorum Euclidis ipsa CF ipsi CE æqualis erit, quod per nonam Comm. Senten. eiusdem fieri non potest. non igitur Sectiones inter se conueniunt. Dico præterea eas, si in infinitum augeantur, ad sese propiùs accedere, & ad minus interuallum peruenire. Sint duæ Hyperbolæ DGE, HIF circa easdem nõ coincidẽtes AB, BC descriptæ, vt in superioribus docuimus. Et sint rectæ lineæ AHDKEFC, LMNOPQR ad dimetientẽ Sectionũ ordinatim ductæ, quæ sibijnuicem erunt parallelę per 25 definitionem huius, & 28 propositionẽ primi libri Elementorum Euclidis. Et sit dimetiens KIB, quæ producatur in puncta S, T ita vt sit SB æqualis ipsi BI; & TB ipsi BG. erit punctum S terminus dimetientis Sectionis HIF, & T terminus dimetientis Sectionis DGE, cùm B sit vtriusque centrum. His it Constructis quoniam per decimam Com. Sent.

Conclusio primæ partis.

Determinatio secundæ partis.

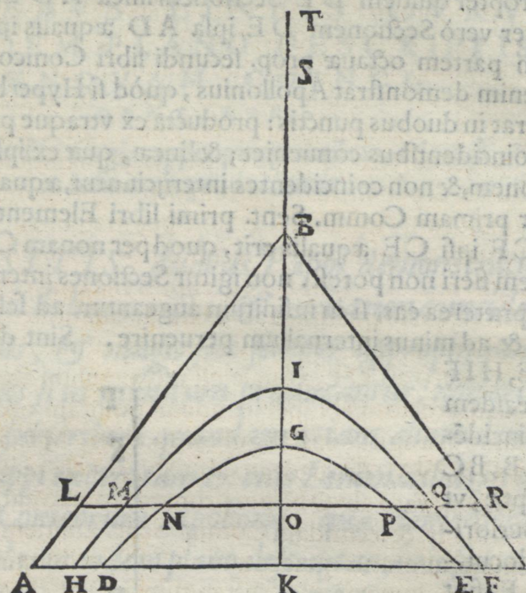
Constructio secundæ partis.



V huius

Demonstratio secundæ partis.

huius, vel per Corollarium primi theorematis in principio huius operis prędemonstrati linea FK maior est quàm QO, & linea DK maior quàm NO: erit per quintam Comm. Sẽt. huius tota DF linea maior quàm tota NQ. est autem (vt in finę huius demonstrationis ostendemus) rectangulum ab FD, DH æquale rectangulo à QN, NM. vt igitur NQ ad DF, ita DH ad NM per secundam partem sextædecimæ propositionis sexti libri Elemen. Euclidis. Sed NQ minor ostensa est quàm DF. ergo & DH quàm NM minor erit per nonam Comm. Sent. huius. idem autem de qualibet etiam inferiori potest ostendi. Quare semper ad minus perueniunt interuallum. Animauertendum est autem quòd si *DH*, & NM non sunt breuissima interualla, quærenda sunt ipsa interualla breuissima, quæ reperientur ductis rectis lineis perpendicularibus a punctis D, N ad rectam AB lineam. Hæc autem breuissima duarum Sectionum interualla semper minora fiunt, & Sectiones ad interuallum quolibet interuallo dato minus peruenient. Possunt etenim Sectiones vnà cũ ipsis non coincidentibus produci (vt patet ex Corollario secundo quartæ demonstrationis) donec breuissimum interuallum interiectum inter non coincidentes, & Sectionem DGE sit dato interuallo minus, quare tunc



Cõclusio secũdæ partis.

Notandum.

erit

erit interuallum inter Sectiones interiectum multò minus interuallo dato per nonam Communem Sent. primi lib. Elem. Eucl.

Nunc autem illud est demonstrādum, quod supra suppos uimus, quòd scilicet rectangulum ab FD, DH sit æquale rectangulo à QN, NM. Demonstretur autem sic. Quoniam linea LR secta est per medium in signo O per vicesimamquintam definitionem huius, & per vltimam partem octauæ propositionis secundi libri Conicorum Apollonij, & non per medium in signo M: erit per quintam propositionem secundi libri Elementorum Euclidis rectangulum ab RM, ML contentum vnà cum quadrato ab OM descripto, æquale quadrato ab OL. at quadrato quidem ab OM rectangulum à QN, NM vnà cum quadrato ON est æquale; quadrato verò ab OL æquale est rectangulum ab RN, NL vnà cum quadrato ab ON per eandem quintam propositionem bis sumptam: erit igitur rectangulum ab RM, ML vnà cum rectangulo à QN, NM, & quadrato ab ON, ęquale rectangulo ab RN, NL, & quadrato ab ON per primam Com. Sent. primi lib. Elemen. Eucl. bis, & secundam Comm. Sent. eiusdem semel sumptas. Commune auferatur quadratum ab ON. reliquum igitur ab RM, ML rectangulum vnà cum rectangulo à QN, NM æquale est rectangulo ab RN, NL per tertiam Com. Sent. primi lib. eorūdem. ijsdem rationibus rectangulum à CH, HA vnà cum rectangulo ab FD, DH est æquale rectangulo à CD, DA. est autem propter DGE Sectionem rectangulum ab RN, NL æquale rectangulo à CD, DA per primam Com. Sent. primi lib. Elemen. Euclid. cùm eorum vnumquodq; sit æquale quartæ parti ipsius formæ per decimam prop. secundi lib. Conicorum Apollonij, sicut etiam in superioribus diximus: & propter HIF Sectionem rectangulum ab RM, ML est æquale rectangulo à CH, HA per easdem primam Com. Sent. & decimam prop. erit igitur per primmam Com. Sent. bis, & tertiam Com. Sent. semel sumptas primi lib. Elem. Eucl. rectangulum à QN, NM æquale rectangulo ab FD, DH. Quod erat demonstrandum.

Suppositi Demonstratio.

Coonclusio suppositi.

Hactenus itaq; Pappi demonstrationes illustrauimus. Animaduertendum est autem ꝙ postquam Pappus de duabus Hyperbolis iam dictam affectionem demonstrasset, subiunxit hæc verba. *Verùm hoc etiā manifestè constat. Si.n. vtraq; ipsarum ad nō coincidentes propiùs accedit, perspicuū est quòd etiam ad sese propiùs accedent*. quæ quidem

Notandum.

Pappi grauissimus er-

Pappi ratio non concludit, vt Commandinus etiam adnotauit. Nam fieri potest vt vtraque Sectionum ad non coincidentes propiùs accedat, sed tamen pari accessionis interuallo, ita vt semper inuicem æquidistent: vel vt earum vtraque ad non coincidentes propiùs semper accedat, celeriùs autem appropinquet ipsis externa quàm interna, ita vt interna ab externa continuè magis recedat: quare ad sese propiùs non accedent; verùm aut æquidistabūt, aut à sese magis, magisq; remouebuntur. Vnde necesse est vt interna celeriori appropinquatione quàm externa ad ipsas non coincidentes propiùs semper accedat. aut enim æqualiter ambæ continuè magis ad ipsas non coincidentes appropinquabunt, aut inæqualiter: & si inæqualiter, dupliciter hoc contingere potest; aut scilicet externa celerius quàm interna, aut è contrario.

Hactenus in Conis ipsis propositum Problema exercuimus. nunc verò consequens est vt hoc admirandum Geometricum Problema absque etiam Conicorum corporum adminiculo in quocunque nobis obiecto plano verissimam habere actionem certissimis demonstrationibus conuincamus.

DEMONSTRATIO SEPTIMA.

Expositio.

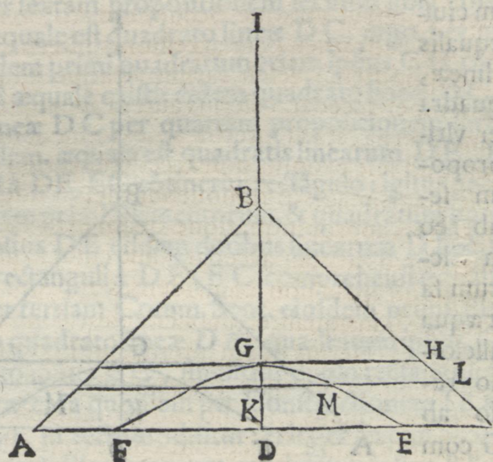


SIT quodcunque planum propositum, volo super ipso duas describere lineas alteram rectam, alteram inflexam, quæ duas iam sæpe dictas affectiones subeāt.

Cōstructio.

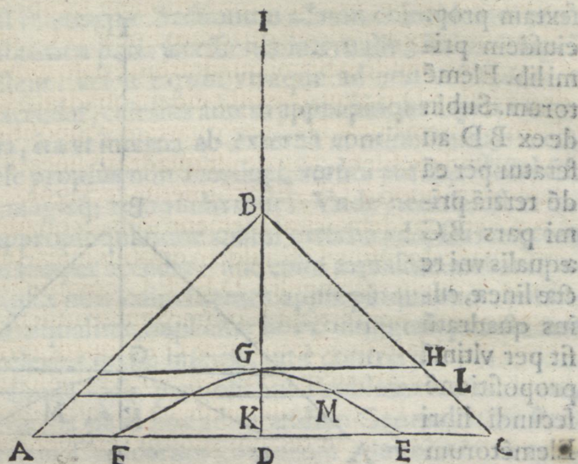
Suscipiatur in proposito plano rectus angulus ABC, qui diuidatur per nonam propositionem primi libri Elementorum Euclidis in duas partes æquales producta recta linea BD, & à signo D, per vndecimam propositionem eiusdem erigatur ipsi BD ad rectos angulos recta linea, quæ vtrinque producta secabit per Constructionem, & quintam petitionem eiusdem rectas AB, BC in signis, quę sint A, C. Deinde inter signa D, C, seu D, A quodlibet accipiatur in ipsa ADC recta linea signum E, sitque illud in præsentia susceptum inter signa D, C. & ab ipsa AD ipsi DE per tertiam propositionem primi libri Elementorum Euclid. abscindatur æqualis DF. nanque DA, & DC, & DB inter se æquales sunt; necnon AB ipsi BC per Constructionem,

nem, & 32, & sextam prop. eiusdem primi lib. Elemẽtorum. Subinde ex BD auferatur per eã dẽ tertiã primi pars BG æqualis vni rectæ lineæ, cuius quadratũ sit per vltimã propositionẽ secundi libri Elemẽtorum Eucl. factum



æquale parallelogrammo rectangulo ab FE, EC contento. hoc enim commodè fieri potest, quandoquidem quadratum lineæ DC maius quidem est iam dicto rectangulo per sextam propositionem secundi, & nonam Comm. Sent. primi lib. Elementorum Euclidis; æquale verò quadrato lineæ BD per Constructionem, & secundam Comm. Sent. huius. Demum per G signum ducatur per tricesimamprimam propositionem primi lib. eorundem Element. GH parallela ipsi DC secans necessariò per vicesimamnonam propositionem, & quintam petitionem eiusdem primi BC lineam in signo H. & producatur per secundam petitionem eiusdem primi in alteram partem quousque per easdem secet etiam lineam AB. Postea verò producatur DB in partem B interminatè, & fiat per tertiam propositionem eiusdem primi BI æqualis ipsi BG. Ipsa denique GD in aliquot vtcunq; secetur partes, atque per sectionum signa ipsi AC parallelæ ducantur secantes AB, BC rectas lineas. quantò autem crebriores ipsius GD sectiones fient, tantò exactiùs propositum habebitur. earundem itaque sectarum partium prima sit GK, & per signum K ipsi DEC rectæ lineæ parallela ducatur per tricesimamprimam propositionem primi lib. Elementorum Euclid. KL. atque ex ipsa KL dematur KM per tertiam

tertiã propositionem eiusdem æqualis rectæ lineæ, cuius quadratum per vltimam propositionem secundi libri eorundem Elementorum factum sit æquale parallelogrammo rectangulo ab IK, KG comprehenso. qđ



etiã cõmodè fieri potest, quoniã quadratũ lineæ KL maius quidẽ est rectãgulo ab IK, KG cõtento, rõnibus ante dictis. His itaq; sic constructis Dico quòd si iam dictæ parallelæ crebriores quoad fieri poterit peragantur, atque in ipsis similia signa, qualia sunt E, M pari Constructione capiantur, eaq́ue rectis connectantur lineis: inflexa quædam creabitur linea Hyperboles lateri haud absimilis, cui AB, BC rectæ lineæ continuè propiores fient; nunquam tamen occurrent, etiam si in infinitum protractæ fuerint.

Determinatio.

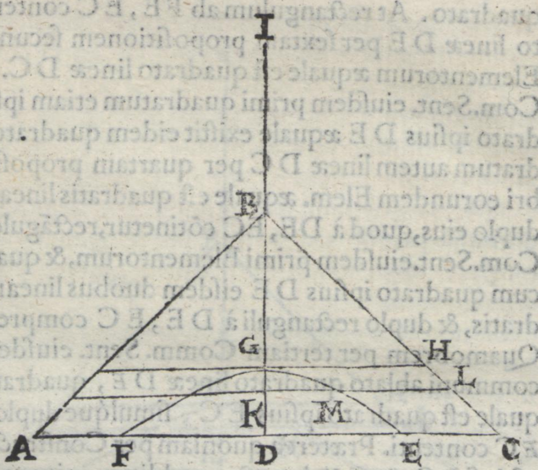
Demonstratio.

Quum enim per Constructionem angulus BDC rectus sit, & GH parallela ipsi CD: erit per vicesimamnonam propositionem primi libri Elementorum Euclidis angulus BGH rectus. sed angulus GBH itidem per Constructionem est recti dimidium: ergo per tricesimamsecundam propositionem eiusdem angulus etiam BHG recti dimidium existit. Vnde per sextam propositionem eiusdem GH æqualis est ipsi BG, cuius quadratum æquale per Constructionem est rectangulo ab FE, EC contento: igitur per secundam Com.Sent.huius, & primam Com.Sent.primi lib.Elem. Eucl. quadratum etiam ipsius GH eidem rectangulo ab FE, EC cõprehenso æquale est. Quare per 2 Com.Sent.pri.li.eorundẽ Ele. rectangulum ab FE, EC contentum vnà cum quadrato ipsius DE est æquale quadrato ipsius GH simul cum eodem ipsius DE

quadrato. At rectangulum ab FE, EC contentum cum quadrato lineæ DE per sextam propositionem secundi libri eorundem Elementorum æquale est quadrato lineæ DC. ergo per primam Com. Sent. eiusdem primi quadratum etiam ipsius GH cum quadrato ipsius DE æquale existit eidem quadrato lineæ DC. Quadratum autem lineæ DC per quartam propositionem secundi libri eorundem Elem. æquale est quadratis linearum DE, EC, & duplo eius, quod à DE, EC cõtinetur, rectãgulo: igitur per primã Com. Sent. eiusdem primi Elementorum, & quadratum lineæ GH cum quadrato ipsius DE eisdem duobus linearum DE, EC quadratis, & duplo rectanguli à DE, EC comprehensi æqualia sunt. Quamobrem per tertiam Comm. Sent. eiusdem primi Element. communi ablato quadrato lineæ DE, quadratum ipsius GH æquale est quadrato ipsius EC, simulque duplo rectanguli à DE, EC contenti. Præterea quoniam per Constructionem IB æqualis est ipsi BG, & GK in rectum additur: erit per sextam propositionem eiusdem secundi Elementorum quadratum ipsius BK æquale rectangulo ab IK, KG contento, & quadrato ipsius BG. & quia per Constructionem, & 29, & 32, & sextam propositionem primi libri eorundem Elementorum linea KL æqualis est lineæ BK: erit per secundam Com. Sent. huius, & primam Com. Sen. eiusdem primi libri, quadratum ipsius KL æquale rectangulo ab IK, KG contento, & quadrato ipsius BG. Verùm per Constructionem rectangulum ab IK, KG, cõprehensum quadrato ipsius KM est æquale. ergo per secundam, & primam Com. Sent. primi lib. Elemen. Euclidis quadratum ipsius KL æquale est quadratis ipsarum BG, & KM. Sed per quartam propositionem secundi libri eorund. Element. quadratum KL est æquale quadratis linearum KM, ML, & ei, quod bis à KM, ML continetur rectangulo. ergo per eandẽ primam Com. Sent. & duo ipsarum BG, KM quadrata eisdẽ duobus ipsarum KM, ML quadratis, & duplo rectanguli à KM, ML contenti æqualia sunt. Quare ablato communi quadrato ipsius KM, erit per tertiam Comm. Senten. eiusdem primi libri Elemen. quadratum ipsius BG, seu ipsius GH (æqualia enim sunt per secundam Com. Sent. huius) æquale quadrato ipsius ML, & duplo eius, quod à KM, ML comprehenditur. Atqui paulo ante ostensum est idem quadratum lineæ GH esse æquale quadrato ipsius EC, & duplo rectanguli à DE, EC contenti:

igitur

igitur per primam Com.Sent. pri.lib. Elem.Eucl.quadratum ipsius ML, & duplum rectanguli à KM, ML comprehensi æqualia sunt quadrato EC lineæ, & duplo eius rectanguli, quòd à DE, EC rectis lineis continetur. Idem autẽ eodem modo potest ostendi in omnibus etiã alijs parallelis per



sectiones ipsius DG tam in partẽ C, quàm in partem A ductis. Quapropter per cõuersum Corollarij primæ superiorũ præcipui Problematis demonstrationũ inflexa EGF Hyperboles linea tali Cõstructionis artificio in infinitũ producta, semper ipsis magis, magisq; appropinquabit, nec tamen cũ ipsis vnquã coincidet. In proposito itaque plano duas in vtraque parte descripsimus lineas alteram inflexam, & alteram rectam, inflexas quidem GE, GF; rectas verò BC, BA, quæ iam dictas duas subeunt affectiones. Quod faciendum erat.

Conclusio.

DEMONSTRATIO OCTAVA.

Cõstructio.



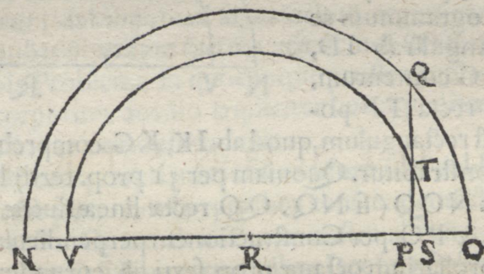
SIT vt prùs angulus ABC rectus diuisus per lineam BD in duas partes æquales, & ipsa AC ducta, & ipsa DB producta interminatè, & in ipsa DB accipiatur quodlibet signum G, & fiat BI æqualis BG, deinde per vltimam propositionem secundi lib. Elementorum Euclidis fiat quadratum æquale rectangulo ab ID, DG contento, & à linea DC per tertiam propositionem primi libri eorundem Elementorum auferatur DE æqualis lateri iam

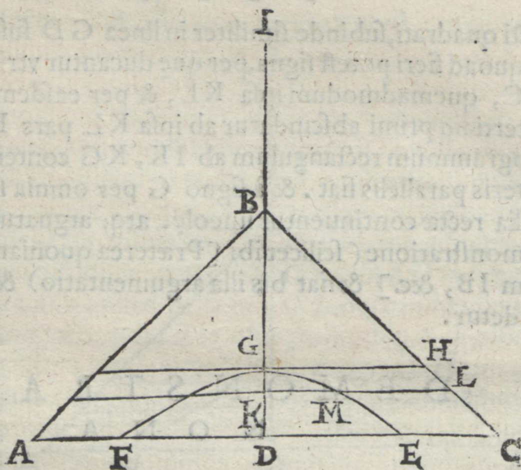
dicti

dicti quadrati, subinde similiter in linea GD suscipiantur crebriora quoad fieri potest signa, per quę ducantur vtrinque parallelę ipsi AC, quemadmodum ipsa KL, & per easdem vltimam secundi, & tertiam primi abscindatur ab ipsa KL pars KM potens parallelogrammum rectangulum ab IK, KG contentum, idemque in cæteris parallelis fiat. & à signo G per omnia signa ipsis ME similia rectæ continuentur lineolę. atq; arguatur vt in præcedenti demonstratione (scilicet ibi [Præterea quoniam per Constructionem IB, &c.] & fiat bis illa argumentatio) & propositum concludetur. Conclusio.

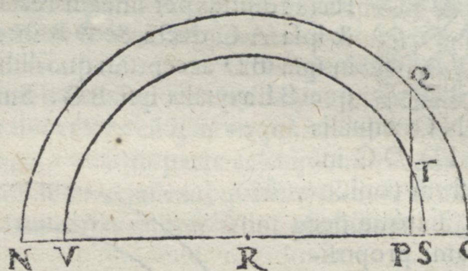
DEMONSTRATIO NONA.

SIT rursus quemadmodum superius angulus ABC rectus diuisus per lineam rectam BD per medium, & ipsa AC ducta, & DB interminatè producta, & in ipsa BD acceptum quodlibet signum G, factaque BI æqualis ipsi BG. Sumatur deinde recta linea NO æqualis ipsis ID, DG indirectum coniunctis. fiatque per tertiam propositionem primi libri Elementorum Euclidis OP æqualis ipsi DG, & erit PN quoque ipsi ID æqualis per tertiam Communem Sententiam eiusdem. Postea verò à signo P erigatur ad angulos rectos ipsi NO per vndecimam propositionem eiusdem primi Elementorum recta PQ interminata ex parte Q, & secetur per decimam propositionem eiusdem recta NO per medium in signo R. & centro R, spatio autem RN per tertiam pet. eiusdem describatur semicirculus NQO secans rectam PQ in signo Q. Cõstructio.





Rursus in quot partes ipsa G D secta fuit in totidem, æqualesq; ipsis per 10 prop. sexti lib. eorundẽ Elem. ipsa quoq; P O secetur, quarũ O S æqualis sit ipsi D K. & similiter centro R, & interuallo R S designetur semicirculus STV secans ipsam quidem PQ rectam lineã in signo T, ipsam verò NR in signo V. His ita constructis dico ꝙ recta linea PQ potest parallelogrammum rectangulũ ab ID, D G contentum, & recta TP potest rectangulum, quod ab IK, KG comprehenditur. quod sic demonstrabitur.



Determinatio proposito deseruiẽs.

Demonstr. eiusdem.

Quoniam per 31 prop. tertij lib. Elemen. Eucl. angulus NQO (si NQ, QO rectæ lineæ ductæ intelligantur) rectus est, & PQ per Constructionem perpendicularis ipsi NO: erit per Corollarium octauæ prop. sexti lib. eorundem Elem. ipsa PQ inter ipsas NP, PO media proportionalis. Quare per primam partem 17 prop. eiusdem quadratum ipsius PQ est æquale rectangulo, quod ab NP, PO continetur. Pari ratione quadratum ipsius PT æquale est rectangulo ab VP, PS contento. At rectangulum ab NP, PO contentum rectangulo ab ID, DG contento, & rectangulum ab VP, PS comprehensum rectangulo ab IK, KG comprehenso æqualia sunt per tertiã Com. Sent. huius. Nam NP quidem

dem ipsi I D, & P O ipsi G D per Constructionem æquales positæ sunt. V P autem ipsi I K, & P S ipsi K G sunt etiam æquales. Cùm enim P O ipsi D G, & S O ipsi D K per Constructionem æquales sint: ergo PS ipsi K G per tertiam Com. Sent. pri. lib. Ele. Eucl. æqualis est. cùm autem N R ipsi R O, & VR ipsi RS per 15 defin. eiusdem prmi æquales sint: igitur ablatis VR, RS æqualibus, erit per eandem tertiam Com. Sent. NV æqualis ipsi SO: quare & ipsi K D per primam Com. Sent. eiusdem. Atque idcirco ablatis NV, & K D ab ipsis I D, & N P æqualibus; remanent per eandẽ tertiam Com. Sent. V P, & I K æquales. Cùm itaque hæc ita sese habeant, manifestum est q; PQ, & PT rectæ lineæ possunt rectangula ab I D, D G, & ab I K, K G comprehensa. Quamobrem si ex D C abscindantur per tertiam prop. primi lib. Elem. Eucl. DE æqualis ipsi P Q, & ex K L similiter K M æqualis ipsi P T (quod rationibus superiùs dictis factu commodum est) ipsæ etiam D E, & K M eadem iam dicta rectangula poterunt. Similiter autem si centro R, & interuallis reliquis ipsius PO sectionibus semicirculi rectam P Q secantes describãtur; cæteræ quoq; parallelarum per signa ipsius D G ductarum partes talia rectangula potentes in ipsa P Q reperientur. Vnde si ab ipsis parallelis iam dictæ etiam reliquæ partes per tertiam prop. pri. lib. eorundem Elem. ressecentur, & à signo G per omnia earum puncta ipsis E M punctis similia rectæ lineolę continuentur: dubio procul superioribus argumentationibus propositum nobis quæsitum factum esse demonstrabitur. Institutum itaque nobis Problema in quocunque prostrato plano sine vllo Conicorum corporum auxilio tripliciter hucusque iuxta tres diuersas Constructiones demonstrauimus.

Conclusio eiusdem.

Applicatio ad propositum.

Conclusio vniuersalis

Nunc autem nobis ad reliquas etiam eiusdem admirãdi Problematis in quolibet subiecto plano sine corporibus conicis demõstrationes progrediendum est. Quare ab instituto nostro alienũ non erit duas hic demonstrationes subiungere, quibus Iacobus Peletarius in Commentario suo de Contactu linearum conatus est duas lineas in eodem piano sine Cono descriptas ostendere, alteram rectam, alteram inflexam, quæ in infinitum protractæ magis semper sibi appropinquent, nunquam tamen coincidant. Quoniam autẽ istæ duæ demonstrationes eo modo, quo à Peletario declarantur, maximam, meo quidem iudicio, suscipiunt imperfectionem (vt inferiùs in ostendendis Autorum de hac re tractantium defectibus

Iacobus Peletarius in commẽtario de contactu linearum.

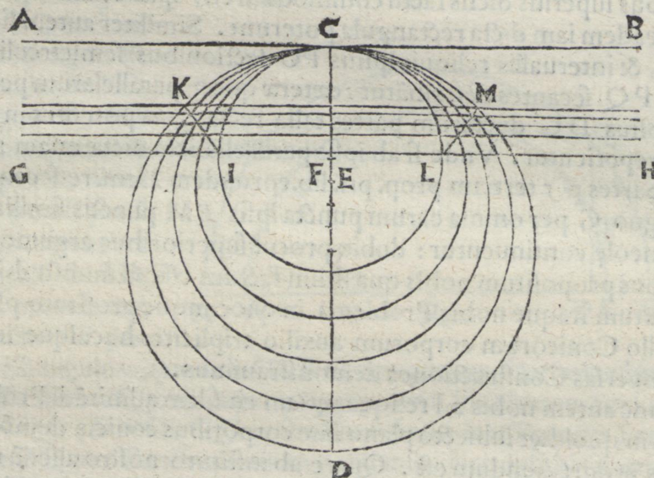
fiet perſpicuum) idcirco non ita ego vt in Commentario Peletarij iacent eas exponam, ſed quoad fieri poterit perfectionem eis adhibebo. Harum verò prima ſit huiuſmodi.

DEMONSTRATIO DECIMA.

Cõſtructio.



SINT duæ rectæ lineæ AB, CD; & ſecet CD ipſam AB ad angulos rectos in ſigno C, ſitque AB ex vtraque parte indefinitæ quantitatis, CD verò in partem D interminata. Suſcipiatur deinde in recta CD ſignum aliquod E, quo ſigno facto centro, & interuallo EC per tertiam pet. 1. lib. Elem. Euclid. circulus deſcri-



batur, qui per Conſtructionem, & Corollarium 16. prop. 3. libr. eorundem Elem. tanget rectam AB in vnico tantùm ſigno C. Similiter acceptis in recta ED crebrioribus quoad fieri poteſt ſignis procedendo à ſigno E verſus D, & occupãdo interualla vſque ad punctũ C, deſcribantur circuli, qui eadem ratione tangent omnes rectã AB in vno tantũ C ſigno: eruntq; per Cõſtruct. & 30 defin. huius poſteriores in deſcriptione prioribus maiores, & exteriores

circu-

circuli. Deniq; per aliquod F signum dimetientis primi, & minoris circuli ducatur per 31. Prop. 1. lib. Elem. Eucl. recta linea parallela ipsi A B secans omnes iam dictos circulos, & ex vtraq; parte indefinitæ quantitatis existens, quæ sit G F H. Manifestum igitur est quòd omnia signa, in quibus G H secat iam dictos circulos, æqualiter à recta A B linea distant. quãdoquidem minimæ eorũ ab ipsa distãtiæ per 32, & 19. Prop. 1. lib. eorundẽ Elemen. sunt perpendiculares ab ipsis ad rectã A B ductæ, quæ omnes inter se sunt parallelę, per 28. Prop. 1. lib. Elem. Eucl. & æquales per 34. prop. eiusdẽ. Si itaque in secundi circuli circunferẽtia inter parallelas A B, G H signũ aliquod sumatur, proculdubio propinquius erit rectæ A B quàm omnia signa, quæ sunt in parallela G H. Sumatur igitur, sitq; proximius lineæ G H, quoad fieri potest, modò nõ tangat ipsam, & vocetur punctũ secundum. per quod iterũ ducatur alia parallela ipsis A B, G H secans eosdẽ circulos, & vtrinq; interminata. & supra ipsam proximè accipiatur tertium signũ in circunferẽtia circuli tertij iuxta descriptionis ordinẽ, per quod rursus ducatur tertia parallela. idemq; in omnibus fiat circulis, hoc tamen animaduerso, quòd tertia parallela sit proximior secundæ quàm secunda primæ, & quarta tertiæ quàm tertia secundæ, & sic in singulis. ac demũ signa illa, per quæ parallelæ ductæ fuerant rectis lineolis cõiungantur, primum. s. cũ secũdo, & secundũ cum tertio, & tertiũ cũ quarto, & sic deinceps. Dico itaque quòd ex paruis rectis lineis per illa pũcta ductis quædã creabitur linea, vt I K, vel ex altera parte L M, quæ si eodẽ artificio per circulorum descriptionẽ, & parallelarũ ductũ vnà cum ipsa A B in infinitũ protrahãtur, semper eidem A B propiores euadent, nũquã tamen ipsi occurrent. Nã quòd semper quidẽ ad ipsam propiùs paulatim accedant, ex Cõstructione patet, cùm primũ signũ ipsi propinquius sit quàm secundũ, & secundum quàm tertium, & tertium quàm quartum, sicq; ordinatim in infinitũ: quòd verò nunquã coniungi possint cũ ipsa, hinc etiã liquet: quoniã si infiniti describantur circuli, infinitisq; parallelis secentur, atq; ipsæ I K, L M lineæ eo modo per sectionũ signa producantur; cõtinuè per circulorũ circunferentias meabunt, ipsasque numquã transgredietur. Cùm autẽ ipsæ circulorũ circunferentiæ nullibi nisi in signo C rectam A B tãgere possint per Corollariũ 16. prop. 3. lib. eorund. Elem. Igitur ipsæ etiã I K, & L M alibi quàm in signo C ipsam nõ tãgent. At neque etiã in signo C ipsã tãgere possunt (alioqui quędã etiã circũferentiarũ

In hoc decipit Peletarius.

Determinatio.

Demonstratio.

signa

signa ab ipso contactus signo C diuersa ipsam A B in eodem C signo contingerent, quod absurdissimum est, & contra iam dictum corollarium) ergo nullibi cum ipsa vnquam conuenient, etiam si in infinitum producantur. Quòd præterea linea I K, seu L M atque huiuscemodi omnes neque rectæ, neque circulares, sed mistæ sint nulli debet esse dubium. Nam si rectæ quidem essent, necessariò ipsi A B occurrerēt per quintam petitionem primi libri eorundem Elementorum cùm à minoribus duobus rectis exeant, vt ex Cōstructione, & 29. propositione eiusdem constat si perpendiculares à punctis sectionum ipsius I K, seu L M ad rectam A B ductæ intelligantur: at huius contrarium ostensum est: igitur rectæ lineæ non sunt. Si verò circulares essent, in infinitum protrahi non possent quin sibiipsis coinciderent, figuramque circularem includerent: hoc autem ab his fieri minimè potest, cùm per diuersas cōtinuè circulorum circunferentias ex Cōstructione pertrāseant. ergo neque circulares esse possunt. Necessariò igitur mistam ex recto, & circulari naturam habent, inflexæque lineæ sunt lateri ipsius Hyperboles aud absimiles. Duas itaque in eodē proposito plano hac etiam via descripsimus lineas alteram rectam, & alteram inflexam, quæ duas sæpenumero commemoratus affectiones sortitæ sunt. Quod faciendum erat.

Hoc malè probatur à Peletario.

Conclusio.

Quoniam in sequenti vndecima demostratione necessarium nobis est vti quodam Theoremate, quod Vitellio in 37. prop. 1. libr. suæ Perspectiuę longa, satisq; obscura demostratione demonstrauit: nō abre factum iri existimo si illud hìc in medium adducamus & quadam breui, facilique demostratione ostendamus. Sit igitur Theorema huiusmodi.

Lemma, seu assumptum sequentis XI Demonstrationis.

Theorema.

Propositio.



MNIVM duorum triangulorum, rectangulorum, quorum vnum laterum vnius rectum angulum continentium fuerit maius altero eorundem laterum alterius, reliquum verò minus reliquo: erit angu-

lus

lus acutus vnius maius latus reſpiciens maior angulo alterius, ſuum relatiuum latus reſpiciente, reliquus autem reliquo minor.

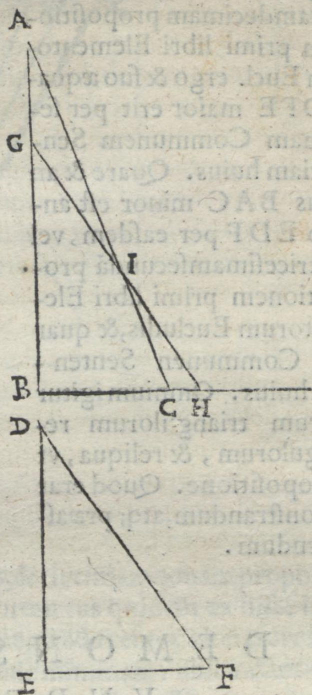
Sint duo triangula ABC, & DEF habentia angulos, qui ſunt ad B, & E, rectos. & ſit latus quidem AB vnius maius latere DE alterius, latus verò BC minus latere EF. Dico quòd angulus ACB angulo DFE maior eſt, angulus autem BAC angulo EDF minor. Auferatur per tertiam propoſitionem primi libri Elementorum Euclid. abipſa AB æqualis ipſi DE, quæſit BG. & producatur per ſecundam petitionem eiuſdem ipſa BC in partem C quouſque excedat ipſam EF. & à tota ipſa producta per eandem tertiam primi reſecetur pars BH ęqualis ipſi EF. cadetque neceſſariò H punctum extra pũctum C. Ducatur demum per primã petitionem eiuſdem à puncto H ad punctum G recta linea HG, quæ neceſſariò (vt ſenſui patet) ſecabit latus AC, alioqui (vt clarè demonſtrat Vitellio in triceſimaſecunda propoſitione eiuſdem ſui primi libri) duæ rectæ lineæ includerent ſuperficiem. quòd eſt cõtra decimam Com. Sent. primi libri Elementorum Euclidis. His ita conſtructis quoniam GB æqualis eſt ipſi DE, & BH ipſi EF, & angulus B angulo E per quartam petitionem eiuſdem (recti enim ſunt) & baſis igitur GH per quartam propoſitionem eiuſdem baſi DF æqualis erit, & totum GBH triangulum toti DEF triangulo erit æquale, & cæteri anguli cæteris angulis æquales erunt ſingulus ſingulo, ſub quibus æqualia latera ſubten-

Expoſitio.

Determinatio.

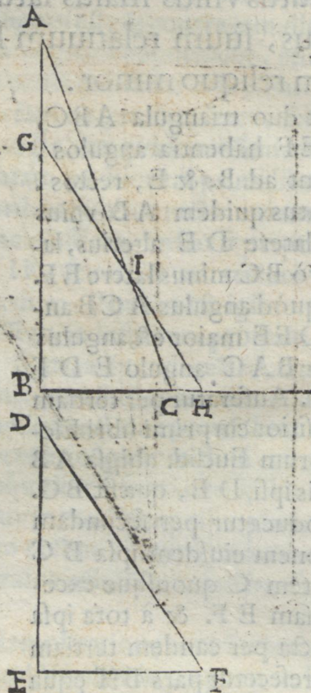
Cõſtructio.

Demonſtratio.



subtẽdũt. Angulus igitur BGH angulo EDF, & angulus GHB angulo DFE æqualis est. Sed angulus ACB angulo GHB maior est per sextamdecimam propositionem primi libri Elementorum Eucl. ergo & suo æquali DFE maior erit per septimam Communem Sententiam huius. Quare & angulus BAC minor est angulo EDF per easdem, vel per tricesimamsecundã propositionem primi libri Elementorum Euclidis, & quartam Communen Sententiam huius. Omnium igitur duorum triangulorum rectangulorum, & reliqua, vt in propositione. Quod erat demonstrandum, atq; præassumendum.

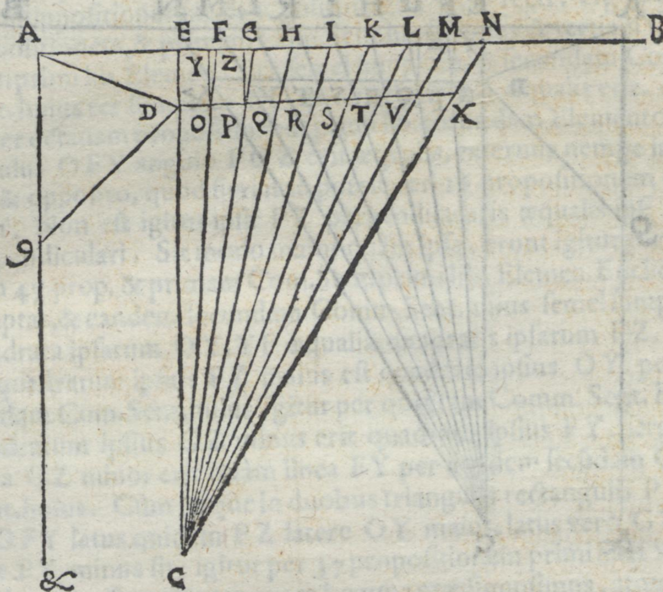
Conclusio.



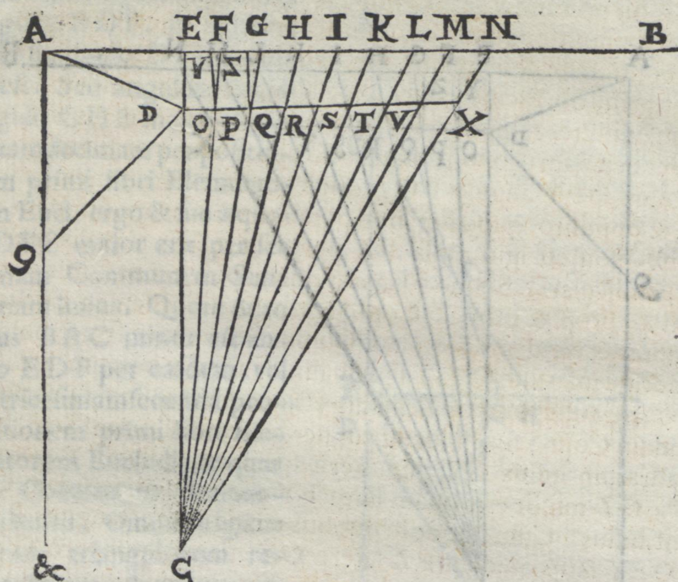
DEMONSTRATIO VNDECIMA.

Cõstructio.


SIT rursus AB recta linea, quam secet alia CDE recta linea ad angulos rectos in signo E. sitque ipsa AB in partem B interminata. & suscipiatur in ipsa CE quodcunque signum D, & à signo C ad quælibet signa (sed sint crebriora quoad fieri potest) ipsius EB ducantur per primam petitionem primi libri Elementorum Euclidis rectæ lineæ triangula cum ipsa CE, atque inuicem, & cũ partibus ipsius EB faciẽtes, vt ipsę CF, CG, CH, CI, CK, CL, CM, CN, & si quæ fuerint plures. Quoniam itaque perspicuum



cuum est per tricesimamsecundam, & decimamnonam propositionem eiusdem primi libri Elementorum eas quidem ex hisce lineis, quæ à puncto *E* magis remotæ sunt, minùs remotis longiores esse, ipsamque *E*C omnium istarum esse minimam: abscindantur per tertiam propositionem primi libri eorundem Elementorum ab omnibus istiusmodi lineis partes æquales ipsi DE quantacunq; sit, vt ipsę FO, GP, HQ, IR, KS, LT, MV, NX. continuentur denique per primam petitionem eiusdem primi omnia hæc abscissionum signa paruis quibusdam rectis lineis, quales sunt DO, OP, PQ, QR, RS, ST, TV, VX. His ita constructis, aio ipsam DOPQRSTVX ex multis illis rectis lineolis compositam lineam quò magis versus partes B vnà cum recta linea AB tali artificio producitur, eò magis ipsi proximari: & nihilosecius cum ipsa nunquam conuenire posse, quamuis etiã in infinitum protrahãtur. Prima igitur Quęsiti pars ita demõstratur. Determinatio.



Demonstratio primæ partis.

Hoc Peletarius non demóstrat, sed negatur.

Quoniam ex omnibus rectis lineis à signo C ad rectam AB ductis nulla præter ipsam CE ipsi AB perpendicularis existit per Constructionem, & tricesimamsecundam propositionem primi libri Elementorum Euclidis: ducantur igitur per duodecimam propositionem eiusdem à punctis O, P duæ perpendiculares super ipsam AB, vt OY, PZ. quæ quidem ratione superiùs sæpe dicta sunt minima interualla, quibus signa OP à recta AB distare possint. Quum itaque per tricesimamsecundam, & decimamnonam propositiones primi libri eorundem Elementorum perpendicularis OY minor sit quàm recta FO, ergo & eius æquali DE perpendiculari minor erit per secundam partem septimæ propositionis quinti libri eorundem Elementorum, & nonam Communem Sententiam huius, vel per solam septimam Communem Sententiam huius. minùs igitur distat signum O quàm signum D ab ipsa AB recta linea. Præterea PZ perpendicularis minor est OY perpendiculari. Si enim minor non sit, aut equalis, aut maior erit.

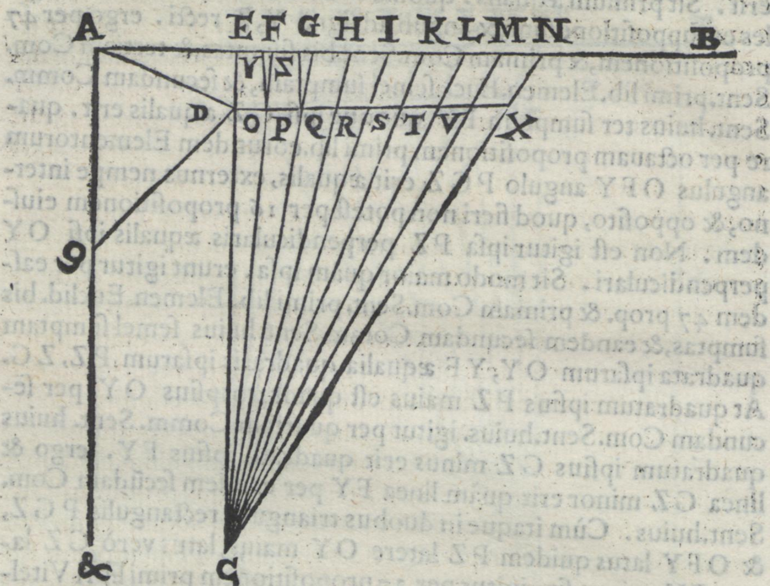
erit. Sit primum æqualis. quoniam autem OF, PG etiam æquales ex ſuppoſitione ſunt, & anguli ad ſigna Y, Z recti. ergo per 47 propoſitionem, & primam Com.Sent.bis ſumptas, & tertiam Com. Sent.primi lib.Elemen.Eucl. ſemel ſumptam, & ſecundam Comm. Sent. huius ter ſumptam FY quoque ipſi GZ æqualis erit. quare per octauam propoſitionem primi lib.eorundem Elementorum angulus OFY angulo PGZ erit æqualis, externus nempe interno, & oppoſito, quod fieri non poteſt per 16 propoſitionem eiuſdem. Non eſt igitur ipſa PZ perpendicularis æqualis ipſi OY perpendiculari. Sit modo maior quàm ipſa. erunt igitur per eaſdem 47 prop. & primam Com.Sent. primi lib. Elemen.Euclid. bis ſumptas, & eandem ſecundam Comm.Sent.huius ſemel ſumptam quadrata ipſarum OY, YF æqualia quadratis ipſarum PZ, ZG. At quadratum ipſius PZ maius eſt quadrato ipſius OY per ſecundam Com.Sent.huius. igitur per quartam Comm. Sent. huius quadratum ipſius GZ minus erit quadrato ipſius FY. ergo & linea GZ minor erit quàm linea FY per eandem ſecũdam Com. Sent.huius. Cùm itaque in duobus triangulis rectangulis PGZ, & OFY latus quidem PZ latere OY maius, latus verò GZ latere FY minus ſit: igitur per 37 propoſitionem primi libri Vitellionis (quàm ſuperiùs tanquam Lemma præſſumpſimus, atque demonſtrauimus) angulus OFY minor erit angulo PGZ, externus ſcilicet interno, & oppoſito, quod per eandem 16 prop. primi libri Elemen. Eucl. fieri nequit. Non eſt igitur PZ maior quàm OY. atqui oſtenſũ eſt ꝙ neque ipſi æqualis, ergo de neceſſitate minor quàm ipſa eſt. minus igitur diſtat ſignum P quàm ſignum O ab eadem AB recta linea. Similiter autem oſtendetur in reliquis etiam huiuſcemodi perpendicularibus, ꝙ quę à puncto E magis remouentur, minùs ab eo remotis breuiores ſunt. Lineam igitur DX verſus partes B continuè ipſi AB propiùs admoueri neceſſe eſt. Quę quidem eſt prima quæſiti pars. Secunda verò eiuſdem quæſiti pars, quòd ſcilicet linea DX cum recta AB nunquam conuenire poſſit, etiã ſi in infinitũ producantur, ſic demonſtrandum eſt.

Concluſio primæ partis.

Demonſtratio ſecundæ partis.

Cùm ex Cõſtructione pũcta ipſa D, O, P, Q, R, S, T, V, X, & ſi qua eſſent huiuſmodi alia, per rectarũ linearum ęqualium, vtputa DE, OF, PG, & reliquarum abſciſſionẽ capiantur: neceſſe eſt inter ipſa ſic ſuſcepta ſigna, & rectam AB tales perpetuò intercipi æquales ad inuicẽ rectas lineas. à punctis autem abſciſſionũ ad rectam AB per-

In hac parte demonſtranda Peletarius petit principiũ, & falſũ quoddam dicit.



per duodecimam propositionem primi libri Elemen. Eucl. perpendiculares semper duci possunt, quippeque per decimamnonam propositionem eiusdem iam dictis abscissis lineis erunt minores, minimeq; distantiæ, per quas linea D X à recta A B in punctis abscissionum distare possit. Si igitur inter ipsam D X, & A B semper quædam perpendiculares duci possunt (vt ostensum est) igitur tanta semper inter ipsas erit distantia, quanta est ipsarum perpendicularium longitudo. Quare patet etiam secunda pars. Quòd autem linea D X eiusdem naturæ sit, cuius est illa, quam in præcedenti demonstratione per circulos descripsimus, eisdem rationibus conuinci potest. Quinimo hìc quoque eiusmodi circuli describi possunt vtranq; ipsius Quæsiti partem ostendentes, si à signo A rectæ A B per vndecimam propositionem primi libri eorundem Elementorum ad rectos erigatur angulos quędam recta linea A &, in & partem interminata, in qua statuantur centra ipsorum circulorum inæqualium, et rectam A B in A signo tangentium, et per singula lineæ D X signa transientium. Centra autem eorundem circulo-

Cõclusio secũdæ partis.

Quòd sit curua.

Vnitur hæc Demonstratio cum pręcedenti.

circulorum in ipsa A & recta linea reperientur, si à signo A ad omnia lineæ DX signa, per quæ circuli transire debent, rectæ lineæ per primam petitionem primi libri eorundem Elementorum quemadmodum ipsa AD ducantur; atque ad ipsa signa, ad ipsasque deductas rectas lineas per vicesimamtertiam propositionẽ eiusdem primi Elementorum anguli rectilinei versus partes C & constituantur æquales angulis, qui à iam dictis deductis lineis, & à linea A & continentur; ac demum rectæ lineæ, quæ denuo adangulorum constitutionem à signis lineæ DX ducuntur, indirectũ protrahantur donec per quintam petitionem primi libri eorundẽ Elementorum ipsi A & occurrant: vbi enim ipsi occurrent, ibi erunt circulorum cẽtra per sextam propositionem, & quintamdecimã definitionem eiusdem primi. vt gratia exempli recta linea AD ducta, ad ipsam, ad datumque in ipsa signum D constituatur rectilineus angulus ipsi DA & æqualis; fiatque ita constitutio, vt recta, quæ vnà cum ipsa AD constituendum angulum est cõprehensura, respiciat versus C & partes. ac denique producatur hęc linea quousque secet lineam A & in signo ɔ (secabit enim eam necessariò per quintam petitionem primi libri Elementorum Euclidis; quoniam per Constructionem angulus DAɔ, & ideo ipsi etiam æqualis per septimam Com. Sent. huius ADɔ est minor recto) igitur per sextam propositionem primi libri eorundem Elementorum Aɔ, et Dɔ æquales sunt. Quamobrem signo ɔ facto centro primi circuli describendi; et interuallo ɔA, si ipse primus circulus describatur; eius circunferentia per quintamdecimam definitionem eiusdem transibit per signa AD tangens quidem per Corollarium sextædecimæ propositionis tertij libri Elementorum Euclidis rectam AB in signo A, secans verò inflexam DX in signo D. Hoc itaque pacto cæterorum quoque circulorum centra in linea A & inuenientur, qui nimirum si describantur; rectam lineam AB omnes in A signo contingent, et singuli per singula lineæ DX signa transibunt, ipsiusque naturã, ortum, & affectiones quemadmodum superiùs nobis ostendent. Duas igitur hac quoque via in proposito plano designauimus lineas alteram rectam, alteram inflexam, quæ in infinitum productæ semper sibi propiores euadunt, numquã tamen ad inuicẽ coëunt. Quod facere oportebat.

In hoc deficit Peletarius.

Conclusio vniuersalis.

AVTORVM

AVTORVM DE HAC RE TRACTANTIVM ERRORES.

Propositum. *XPEDITIS iam vndecim varijs propositi Problematis demonstrationibus, quæ mihi afferendæ in medium erant, consequens est Autorum, qui de hac re tractarunt deliquia ostendere; nullius equidem malignitatis, mordacitatisue, seu inanis iactantiæ gratia: sed solum vt huius pulcherrimi, admirandiq́; in Geometria Problematis demonstrationes à multis erroribus vindicentur, expurgenturq́; ac demum eius veritas candida, ab omniq́; macula immunis studiosis relinquatur.*

Ordo. *In explicandis itaque Autorum defectibus integras eorum demonstrationes haud enarrabo, verùm locos duntaxat eos pertingam, in quibus ipsi (ni fallor) deliquium perpessi sunt. atque non omnia ab eis prætermissa declarabo (multa enim sunt) sed ea tantùm, quæ adeo necessaria mihi videntur, vt sine illis demonstrationes eorum nullæ sint. Siquis verò cuncta, quæ ab ipsis vel omissa penitus, vel obscurè, inordinatè, confuseq́; dicta sunt exactè animaduertere voluerit; eorum volumina in principio à nobis commemorata perlegat, nostrasq́; superiùs allatas demonstrationes diligenter cum suis conferat.*

DIGRES-

DIGRESSIO CONTRA VERNERVM.



ERVM enimuero vt iam rem ipsam aggrediar Ioannes Vernerus Nurembergensis Mathematicus Clarissimus in libello suo de vigintiduobus Elemẽtis Conicis prope finem Problema, de quo nunc agimus, duobus modis demonstrauit; quorum alter quidem est ille, quem nos in prima nostra demonstratione instaurauimus: alter verò, quem in septima, & octaua, & nona nostris demonstrationibus illustrauimus, atque ampliauimus. Antequam autem ad ipsius Problematis demonstrationem accederet, eas tres ipse propositiones demonstrauit, quas nos etiam ante primam propositi Problematis demonstrationem prædemonstrauimus. Sunt autem apud ipsum decimumseptimũ, decimum octauum, & decimum nonum Elemẽta Conica. quanuis perperam ipse has tres propositiones ordinauerit; quoniam secundam loco primæ, & primam loco secundæ posuit: cùm tamen in ostendendo proposito prius secunda quàm prima abutatur. nos verò eo ordine ipsas disposuimus, quo ipsis vtimur. In tertia itaque harum trium propositionũ, quæ apud nos etiã tertia est, maximè Vernerus defecit. quoniã Theorema illud particulatim proposuit, atque demonstrauit; cùm tamen vniuersè verum sit, atque in proposito nostro in vniuersum tum proponi, tum demonstrari necessariò debeat, alioquin proposito problemati quibusdam in Casibus deseruire non poterit. Sic enim illud Vernerus proposuit. *Si duo data rectangula inæqualium longitudinum quadratis suarum latitudinum iungantur, fuerintq́ hæc duo aggregata inuicem æqualia: erit quadratum aggregati maioris longitudinis minus quadrato aggregati breuioris longitudinis.* Si igitur in proposito nostro (vt in primæ nostræ demonstrationis secunda figura) ipsa KO, & PR latera quadratorum, quibus parallelogramma rectangula adiungi debent, haud latitudines ipsorum rectangulorum, sed longitudines ambo; vel alterum quidem longitudo, alterũ verò latitudo fuerint: quid nam dicendum erit? vtrum in his etiam Casibus iam dictum Theorema nobis deseruit? nonne inutile prorsus erit, cùm de illis tantùm rectangulis loquatur, quæ cùm inæquales habeant longitudines, quadratis suarum latitudinum

Ioannis Verneri prauus ordo.

Ioãnis Verneri defectus primus.

num iunguntur? Quid enim siquis dubitet vbi rectangulorum latitudines inæquales supponuntur, ipsaque rectangula quadratis suarum longitudinum iunguntur: vel quando latitudo vnius longitudini alterius inæqualis supponitur, ipsorumque rectangulorũ alterum quidem quadrato suæ longitudinis, alterum verò quadrato suæ latitudinis iungitur, sunt autem duo aggregata æqualia; an in his etiam duobus Casibus Theorema verum sit, nec ne? quòd scilicet quadratum aggregati maioris latitudinis minus sit quadrato aggregati minoris latitudinis, vel quòd quadratum aggregati maioris longitudinis minus sit quadrato aggregati breuioris latitudinis. Quòd itaque in his duobus Casibus Theorema illud ita vt à Vernero proponitur, demonstraturque nullum nobis auxilium afferat, perspicuum est. Quòd verò propositum problema iuxta primum nostrum demonstrandi modum duos etiã, quos diximus Casus suscipere possit, quisque cognoscere poterit si modò longe à summitate, modò prope summitatem Hyperbolis parallelas ipsas duxerit. tres enim omnino Casus inueniet. quorum vnus est, quando ambæ parallelæ intra Hyperbolem ab vno eius latere ad alterum ductæ ambabus parallelis inter Hyperbolem, & non coincidentem extra Conum sibi indirectum iacentibus maiores sunt; vt Vernerus accepisse videtur, quẽ Casum tanquam commodiorem nos etiam suscepimus; & in hoc Casu rectangula inæqualium longitudinum quadratis suarum latitudinum iunguntur. Secundus verò Casus est, quando ambæ iam dictę internę parallelæ ambabus eisdem externis indirectum sibi iacentibus minores sunt, verbi gratia si in ipsa iam dicta nostra figura duplæ ipsarum KL, PQ rectarum linearum rectis KO, PR minores essent; atque in hoc Casu rectangula inæqualium latitudinum quadratis suarum longitudinum adiunguntur. Tertius autem Casus est, quãdo altera quidem dictarum internarum parallelarum externa sibi indirectũ iacente parallela minor est, altera verò earundem internarum maior quàm externa ei indirectum iacens; ac demum in hoc casu rectangula latitudinem longitudini inæqualem cùm habeant, alterũ quidem eorum quadrato suæ longitudinis, alterũ verò quadrato suæ latitudinis iungitur. Quòd igitur propositum Problema iuxtà primum nostrum demonstrãdi modum duos etiam hosce vltimos Casus suscipere possit credo nemini dubiũ esse. Potest autem hoc etiã sic cõfirmari. Pappus Alexandrinus ostendit (vt superius vidimus) quòd,

Tres casus secundæ partis tertij nostri Elementi in principio positi.

Primus Casus.

Secundus Casus.

Tertius Casus.

quòd circa non coincidentes rectas lineas duæ Hyperbolæ describi possunt, quæ etiam inter sese non coincidentes sunt, & semper sibi magis appropinquant in infinitum productæ. iuxta hanc doctrinam igitur circa non coincidentes rectas lineas huiuscemodi Hyperboles infinitas vnam intra aliam describere possumus. Vnde manifestum est, quòd iam dictæ internæ parallelæ continuè minores, externæ verò maiores fient. Quòd verò iam dictum Theorema in omnibus hisce Casibus vniuersè verum sit, facilè ostendetur si demonstratio illa, qua nos secundam eius partem demonstrauimus, cunctis Casibus coaptabitur. nos enim vniuersaliori quodam modo Theorema illud proposuimus, atque demonstrauimus. cuius secunda quidem pars tribus iam dictis opitulatur Casibus, prima verò quamuis proposito nostro nullum afferat iuuamentum (quoniam nunquam parallelæ intra Hyperbolem ab vno eius latere ad alterum ductæ æquales inuicem sunt, sed basi Coni propinquiores remotioribus semper maiores, vt ex decima Com. Sent. huius, vel ex Corollario primi prædemonstrati Theorematis patet) nihilominus Theorematis vniuersalem doctrinam nobis ostendit. Habet autem & illa prima pars duos Casus. aut enim latera illa, quæ ibi supponuntur æqualia longitudines rectangulorum sunt ambo, aut ambo latitudines. nam alterum quidem longitudo, alterum verò latitudo esse non possunt, cùm aggregata æqualia esse debeant, vt consideranti liquet. Cùm itaque iam dictum Theorema vniuersale sit, & prima quidem eius pars duos suscipiat Casus, secunda verò tres, qui porrò tres Casus eius, de quo sermonem habemus Problematis Constructioni accidere possunt: necessarium mihi visum fuit vniuersè illud proponere, atque demonstrare, vt quod etiam præ manibus habemus Problema vniuersè construi, demonstrariq; posset. Maximum etenim in scientijs vitium est (vt docet Aristoteles) ea, quæ vniuersè demonstrari possunt, particulatim ostendere. Qui namq; omne Aequilaterum, aut Aequicrure, aut Scalenum ostendit tres habere angulos duobus rectis æquales, non demõstrat vniuersè, etiã si in vnaquaq; specie hoc demõstrauerit; sed qui omne Triangulũ quatenus Triangulum est. Hũc igitur errorẽ Vernerus mihi perpessus esse videtur, cùm Theorema illud particulatim proponat, atq; demonstret, credens tamen se vniuersè demonstrare. Non.n.quadratũ aggregati maioris longitudinis quadrato aggregati minoris lõgitudinis propterea minus

Quomodo Theorema illud nostrum in tribus casibus demonstretur.

Duo primæ partis casus qui sint.

Lib. Posteriorum.

est, quòd rectangulorum longitudines quidē inęquales sint, aggregata verò æqualia (nam si latitudines etiam, vel latitudo, & longitudo inæquales supponantur, aggregata autem æqualia; eadem affectio sequitur, vt iam diximus) sed quia rectangula quadratis adiuncta vnum quidem commune cum ipsis latus habent, duo verò indirectum iacentia, & in vno rectangulo maiora quàm in altero; aggregata autem æqualia sunt, vt secunda Theorematis pars proposuit. At si tum latera in directum iacentia vnius lateribus indirectum iacentibus alterius, tum aggregata æqualia fuerint: quadrata etiam, quibus rectangula eo modo adiunguntur ęqualia sunt, vt in prima Theorematis nostri parte proposuimus. Hæc igitur sunt subiecta, quibus primò, & per se, & quatenus talia duæ dictæ æqualitatis, & inæqualitatis affectiones insunt; non secus ac Trianguli tres angulos duobus rectis æquales habere. Si enim duo hæc subiecta auferantur, hæ quoque duæ affectiones primò auferuntur: & si hæc ponantur, hæ quoque primò ponuntur, cùm alijs priùs non insint. Sicuti etiam Triangulo ablato, affectio hæc, habere tres angulos æquales duobus rectis primò aufertur: positoque, primò ponitur, quoniam huic primò inest. Ablatis autem rectangulorum longitudinis inæqualitate, & aggregatorum æqualitate; affectio inæqualitatis quadratorum non aufertur. quoniam inest etiam quadratis, quibus rectangula inæqualium latitudinum; siue longitudinis, & latitudinis adiuncta, aggregata æqualia faciunt. Positis rursus illis, affectio primò non ponitur, cùm alijs etiam (vt ostendimus) subiectis priùs inesse possit. Verumtamen quoniam hæc iam conspicua sunt, ad alium Verneri defectum ostendendum accedamus. In vicesimo itaque suo Elemento Conico, vbi Problema, de quo sermonem habemus demonstrauit, in demonstranda secunda eius parte paralogismum quendam commisit, quem etiam omnes alij, quos vidi huiusce rei Autores admiserunt, præter Hieronymum Cardanum, qui rectè quo ad hoc concludit. Paralogismus autem talis est. Cùm Vernerus (vt in primę nostræ demonstrationis secunda figura) parallelam K O parallela P R maiorem esse ostendisset, statim concludens subiunxit. *Ergo signum P propius est rectæ lineæ M H productæ quàm signum K* (quamuis corruptè ibi legatur, *quàm signum O.*) *Horum autem vtrunque signorum K P* (& si ibi etiam mendosè legatur, *O R*) *existit in Hyperbolica sectione G I D. & quoniam idem de omni alio puncto,*

Secūdus Verneri defectus.

puncto, quod in eadem obliqua linea Hyperbolicæ sectionis GID extiterit, eodem modo demonstrari poterit vsque in infinitum: igitur quantò amplius recta linea MH, & inflexa linea Hyperbolicæ Sectionis GID producantur: eò amplius appropinquant, quod Secundò demonstrare oportuit. Hæc sunt eius verba, in quibus concludit lineæ Hyperbolicæ signum P propius esse rectæ MH lineæ quàm signum K, eò q KO recta linea maior est quàm PR. quæ quidem conclusio esset optima si KO, & PR perpendiculares essent ipsi MR rectæ lineæ. tunc enim ipsæ essent minimæ distantiæ, quibus signa KP à recta linea MR distare possint. quoniam autem perpendiculares non sunt (vt ibi ostendimus) atque propterea neque minimæ distantiæ, idcirco paralogismus in conclusione committitur. quandoquidem à causa remota, & extrinseca propositum concluditur. Nam causa maximè propinqua, & immediata maioris appropinquationis signi P ad rectam lineam MR, quàm signi K ad eandem, est minimæ signi K distantiæ maior longitudo, minimæ signi P distantiæ longitudine: non autem cuiusuis distantiæ signi K à recta MR maior longitudo, cuiusuis distantiæ signi P longitudine. Quando enim rem aliquam alicui propinquiorem alia quadam ostendere volumus, non dicimus illam minùs quàm hæc distare iuxta quaslibet earum distantias; sed iuxta minimas, quibus ambæ ab ipsa tertia distare possint. Quamuis itaque parallelarum KO, PR inæqualitas perpendicularium KT, PV inæqualitatis causa sit (vt in superioribus patuit) non ob id tamen hìc manendum est, ex hacque remota causa propositum concludendum: verùm vlteriùs progrediendum, quousque immediata reperiatur causa, ex qua propositum rectè concludi possit. veræ enim demonstrationes (quales Geometricæ sunt) ex immediatis causis fieri debent, vt Aristoteles docuit. Qui autem ex causis remotis in Geometria demonstrationes conficiunt, sophisticè quidem demonstrant, paralogismosque committunt. Hęc autem ad Vernerum dicta sufficiant.

Lib. Posteriorum.

DIGRESSIO CONTRA CARDANVM.

HIERONYMVS verò Cardanus Mediolanensis in libro sextodecimo de Subtilitate Problema, de quo loquimur demonstrauit eo demonstrandi modo, cui nos in secunda nostra demõstratione maiorem perfectionem donauimus. Quanuis autem Cardanus ibi dicat se velle vti demonstratione Rabbi Moysis Narbonensis exponentis dictum Rabbi Moysis Aegyptij; nihilominus Demonstratio Cardani à prima, præcipuaque Rabbi Moysis demonstratione tantùm differt, quantùm nostra secunda demõstratio à prima discrepat. nã prima, præcipuaque Rabbi Moysis quidem demonstratio (vt inferiùs manifestum fiet) eadem quasi est cum nostra prima, & cum Verneri demonstratione: Cardani verò demonstratio secundæ nostræ demonstrationi, necnon vltimo ipsius Rabbi Moysis exemplo similis est. In suæ itaque demõstrationis initio peccat Cardanus, quoniã volens probare (exempli gratia in secundæ nostræ demõstrationis figura) quòd planũ A C E F non potest tangere Coni superficiem alibi, quàm in linea A C; petit principium, atque idem per idem probat. Vt autem quod dicimus magis perspicuum fiat, audiamus eius verba. inquit itaque Cardanus. *Sit igitur Conus A B C D: nunc triangulum nullum* (quanquam ibi *nullo* perperam legatur) *secantem intelligo, sed per A B D intelligo conuexam* (quanuis malè ibi legatur *connexam*) *Coni superficiem, in qua protraho A C à vertice vsque ad basin. Et sit K plana superficies contangens Conum in recta linea A C: quæ superficies intelligatur in infinitum cum Coni superficie extendi. Dico primò hanc superficiem planam non posse tangere Coni superficiem alibi, quàm in linea A C: Quòd si potest, tangat in G, & duco* (licet ibi deprauatè legatur *duo*) *Circulum æquidistantem per G basi B C D:* (vel legatur meliùs, *Circulum per G æquidistantem basi B C D:*) *cùm igitur Circulus sit in vna superficie, erunt puncta contactus plani* K, *& peripheriæ Circuli illius in vna recta linea, ex demonstratis in vndecimo Elementorum Euclidis. Quamobrem cùm illa linea iam tangat Circuli peripheriam in linea A C, cadet ex demonstratis ab Euclide in tertio Elementorum*

Cardani defectus primus.

mentorum extra circunferentiam Circuli V X G, igitur non tanget illum in puncto G. Hæc ſunt verba Cardani, quæ quantùm obſcura ſint, & non Geometricè dicta, verſatis in Geometria iudicãdum relinquo. Hoc autem in primis animaduertam, quòd hæc omnia, quę dicit Cardanus, commodè in noſtræ ſecundæ demonſtrationis figura conſpici poſſunt; ſi per planũ quidem K, noſtrum A C E F planum intelligamus; per Circulum verò V X G, ipſum H G I apud nos Circulum. Cùm itaque ita Conum, & planum in linea A C eum tangens Cardanus conſtruxiſſet, vt verba eius explicant; volens in primis probare illud planum non poſſe tangere Coni ſuperficiem alibi, quàm in A C linea: incipit hoc indirecta demonſtratione oſtendere, poſtea verò directè concludit ſupponens id, quod à principio probandum ſuſcepit. ac demum hæc eius demonſtratio neque directa, neque indirecta Geometrica, ſed potiùs Chimerica mihi videtur. Nam directa quidem demonſtratio Geometrica directè ſemper arguendo, & ea, quæ vera ſunt ſupponendo, propoſitum ex eius cauſis concludere debet: indirecta verò Geometrica demonſtratio ſupponens ſtantim à principio contrarium eius, quod quæritur, arguensque ſemper indirectè iuxta ſecundum Hypotheticarum Ariſtotelis ratiocinationum modum, deducit tandem nos ad aliquod inconueniens, quod ſuppoſitionem fuiſſe falſam indicat, eiusque contrarium, nempe Quæſitum verum eſſe demonſtrat. At hæc Cardani demonſtratio ſupponit quidem mox à principio contrarium eius, quod quæritur (cùm dicat: *Quòd ſi poteſt tangat in G, &c.*) deindè directè ſemper arguens ad nullum deducit incommodum, ſed Quæſitum denique directè concludit illis verbis. *Quamobrem cùm illa linea iam tangat Circuli peripheriam in linea A C, cadet ex demonſtratis ab Euclide in tertio Elementorum extra circunferentiam Circuli V X G, igitur non tanget.* Quæ porrò verba nullum abſurdum continent, ſed propoſitum directè concludunt. Ni forſan dicat aliquis ad hoc inconueniens hanc demonſtrationem deducere, quòd eadem plana ſuperficies eandem Conicam ſuperficiem in eodem ſigno G priùs tangere ſupponatur, poſtea verò non tangere concludatur. Huic autem dictum volo, quòd hoc admitteretur, ſi illa vltima concluſio, quæ ſuppoſitioni oppugnat à Quæſito diuerſa eſſet: quoniam autẽ eadem cum Quæſito eſt, non poſſumus dicere ipſam eſſe incommodum, ad quod deducitur. Nam

Obiectio. Reſponſio.

incom-

incommodum, ad quod omnis indirecta Geometrica demõstratio deducit, diuersum à Quæsito semper esse debet: alioquin illa demonstratio ex indirecta in directam transiret, nugatioque in eius principio fieret. Exempli gratia volens Geometra probare quòd si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint, latera etiam, quæ sub æqualibus angulis subtendunt æqualia inuicem erunt: atque non potens hoc commodè per demonstrationem directam probare, per indirectam ostendit; & supponit quidẽ latera esse inęqualia, quod est Quæsito contrarium, ac demum ratiocinando deducit ad hoc absurdum quòd pars sit æqualis toti. quod quidem absurdum idem cum Quæsito non est, sed longè diuersum, vt patet: neque suppositioni illi oppugnat, quæ statim in principio Quæsito contraria posita fuit (quoniã idem cum Quæsito esset, duo enim eidem contraria esse non possunt) sed illi communi sententiæ aduersatur, quæ ait, omne totũ est maius sua parte Quemadmodum igitur in hac indirecta demonstratione inconueniens, ad quod deducitur à Quæsito diuersum est, sic etiam in omnibus alijs demonstrationibus indirectis esse debet: alioquin id, quod diximus sequeretur. Si nanque in iam dicta demonstratione ad contrarium primæ suppositioni incommodum (vt fecit Cardanus) deduceretur, quod idem cum Quęsito est, nempe latera sub æqualibus angulis subtendentia inuicem æqualia esse: non ne hæc potiùs esset directa Quæsiti demõstratio? quid igitur opus esset à principio cõtrarium Quæsiti supponere, si directa demonstratione illud concludi posset? nonne manifesta committeretur nugatio? Quòd itaque nullo pacto huiuscemodi demonstratio in Geometria fieri possit, bonis Geometris perspicuum est. Quanuis ipse Cardanus in sua Logica (quam manuscriptam ipse nobis ostendit) dicat hunc esse quendam pulcrum demonstrandi modum, appellarique Chrysippeum, seu Cornutũ: sed ipse viderit an chimericus potiùs, quàm Chrysippeus sit. Quòd verò Cardanus talem faciat demonstrationem, quæ etiam fuit causa vt committeret petitionem principij, ex eius verbis manifestum est. ait enim. *Dico primò hanc superficiem planam non posse tangere Coni superficiem alibi, quàm in linea AC:* hoc est illud, quod probandum proponit, quòd scilicet superficies plana apud ipsum nominata K, in nostra verò figura ACEF, non potest tangere superficiem conicam alibi, quàm in linea AC. *Quod si potest, tangat in G.* nunc aggreditur indirectam probationem, & statim

Exemplum.

Logica Cardani non extat impressa.

ſtatim à principio ſupponit Quæſito contrarium, quòd ſcilicet plana illa ſuperficies non ſolùm in linea A C tangat conicam ſuperficiem, vt Quæſitum dicebat; ſed etiam in alio ipſam tangat ſigno extra lineam A C iacenti, vt cauſa exempli inſigno G. *Et duco circulum P G æquidiſtantem baſi B C D*. hoc conſtruit vt demonſtrationi deſeruiat. *Cùm igitur Circulus ſit in vna ſuperficie, erunt puncta contactus plani* K, *& perieheriæ Circuli illius in vna recta linea, ex demonſtratis in vndecimo Elementorum*. hìc demonſtrat vnũ, quod ad cõcludendum Quæſitum maximè confert, quòd ſcilicet puncta contactus plani K, & circunferentiæ ducti circuli (quæ in noſtra figura ſunt puncta G H) ſint in vna recta linea iacente tum in plano K, tum in plano ipſius circuli. ſed verba eius obſcurè, diminutèque hoc explicant. ſic enim illa verba intelligi debent. *Cùm igitur Circulus ſit in vna ſuperficie*. hoc eſt cùm circulus ille ductus vnum ſit planum, & ipſum K alterum planum, quæ duo plana ex ſuppoſitione in ipſis contactus punctis ſe ſecant. *Erunt puncta contactus plani* K, *& peripheriæ, &c.* hoc eſt erit cõmunis eorum planorum ſectio vna recta linea tranſiens per illa contactus puncta per tertiam propoſitionem libri vndecimi Elementorum Euclidis. Talis meo quidem iudicio debet eſſe verborum illorum ſenſus. Hucuſque autem benè procedit indirecta demonſtratio, vt ex noſtra ſecunda demonſtratione conijci poteſt. poſtea verò ſubiungit. *Quamobrem cùm illa linea iam tangat circuli peripheriam in linea A C, cadet ex demonſtratis ab Euclide in tertio Elementorum extra circunferentiam Circuli V X G, igitur non tanget illum in puncto G.* Hæc ſunt illa verba, quæ totam hanc demonſtratiunculam euertunt, atque corrumpunt, quæque petitionem principij cõtinent. eorum enim talis eſt ſententia. Cùm oſtenſum quidem ſit vnam eſſe rectam lineam cõmunem iſtorum planorum ſectionem, quæ tranſit per illa duo puncta, in quibus planum K tangit conicam ſuperficiem: illa autem recta linea iam tangat circuli circunferentiam in linea A C, cadet per decimamoctauam, & ſextamdecimam propoſitionẽ tertij libri Elem. Eucl. extra circunferentiam ipſius circuli. Quamobrem neque ipſa recta linea, neque planum K, in quo ipſa eſt, tanget circuli circunferentiam in ſigno G; atque idcirco neque etiam Conicam ſuperficiem, in qua iacet circuli circunferentia, in ipſo G ſigno tangere poteſt. Hæc itaque eſt perfecta verborum illorum ſententia, quæ directè Quæſitum videtur concludere, & chimericam

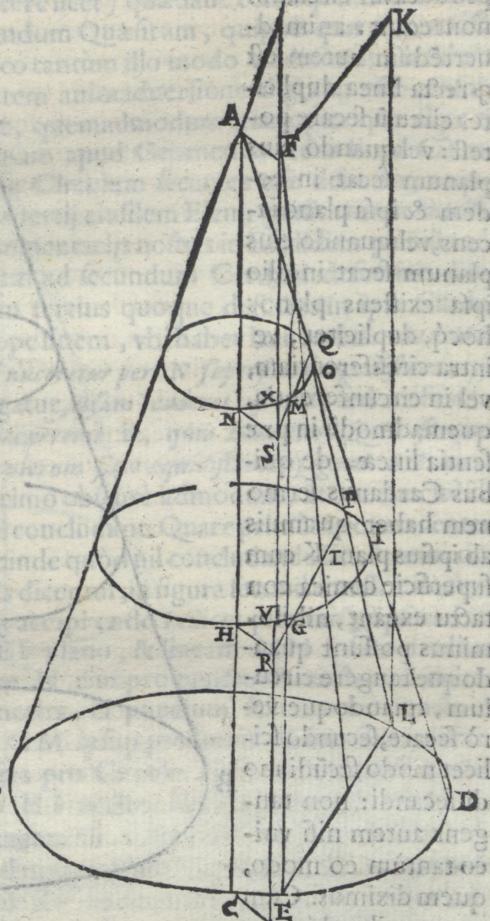
cam illam (quam superiùs diximus) demonstrationem conficere. Fortasse autem directa hæc Quæsiti conclusio bona esset auferendo illam Quæsito contrariam suppositionem in principio positam, ni (quod peius est) in illis vltimis verbis principium peteret. verùm iccirco nullo modo admittenda est. Cùm enim dicit rectam illam lineam iam tangere circuli circunferentiam in linea A C, tunc nimirùm petit principium. quoniam nequaquam illucusque probauit lineam illam tangere circuli circunferentiam, quod nihilominus tanquam iam probatum inferre videtur. idem autem hoc est ac si supponeret planum K non tangere Coni superficiem alibi quàm in ipsa A C linea, quod vtique probandum ab initio sibi proposuerat. Quòd verò idem sit lineam illam in plano K iacentem tangere circulum in linea A C, ac si dicamus planum K non tangere Coni superficiem alibi quàm in linea A C; non est cognitu difficile. Si enim recta linea in plano K iacens tangat in linea A C circulum in superficie conica descriptum, necessariò rationibus superiùs dictis tum ipsa linea, tum planum K, in quo ipsa iacet, extra circuli circunferentiam cadent; nec tangent conicam superficiem nisi in linea A C, in qua ipsam tangere supponuntur.

Dubitatio. At si quis fortè dicat, cùm supponatur planum K tangere conicam superficiem in linea A C, necnon circulorum omnium basi parallelorum in ipsa descriptorum circunferentias; ex hoc sequi rectas etiam lineas ab ipsa A C recta linea in plano K ductas tangere tum Coni superficiem, tum circulorum in ea sic descriptorum circunferentias:

Solutio. huic respondeo, quòd licet planum K tangat Coni superficiem, & circulorum in ea descriptorum circunferentias in linea A C; non ob id tamen necessarium est vt rectæ etiam omnes lineæ ab ipsa A C in plano K deductæ tangant tum Coni superficiem, tum dictorum circulorum circunferentias: nam Coni quidem superficiem necessariò semper tangent, circunferentias verò circulorum quandoque tangere, quandoque etiam secare possunt, vt manifestum est. Hæc igitur dicta sint ad Cardani falsam, principiumque petentem demonstratiunculam, quam nos in secunda nostra demonstratione cùm indirectè, tum directè instaurauimus. Rursus autem paulo inferiùs paralogismum committit Cardanus his verbis. *Et ducantur rectæ L T, & O M in superficie K* (quamuis ibi corruptè, H legatur) *quæ contingent circulos Q L P, & X O V, quia ducuntur ex loco contactus*. In figura secunda nostræ

Cardani defectus secundus.

demonstra-



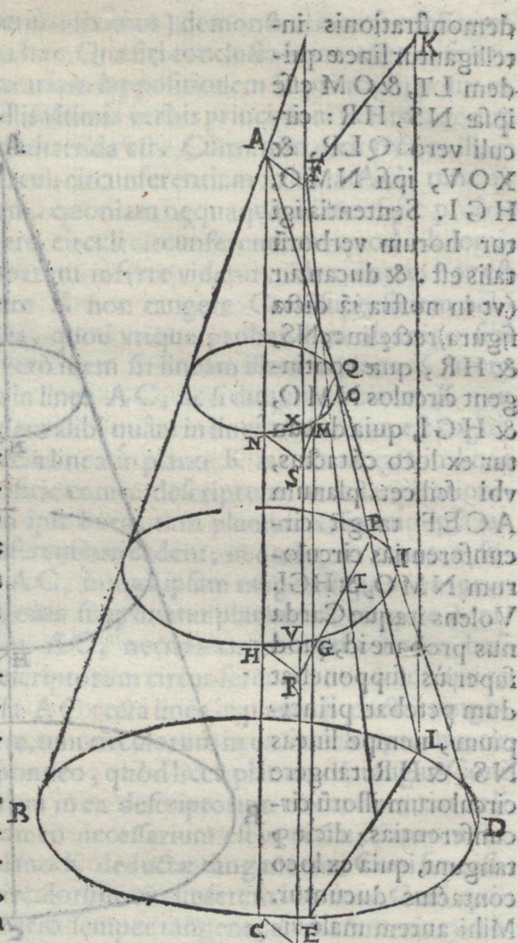
demonſtrationis intelligantur lineæ quidem LT, & O M eſſe ipſæ N S, H R: circuli verò Q L P, & X O V, ipſi N M O. H G I. Sententia igitur horum verborũ talis eſt. & ducantur (vt in noſtra iã dicta figura) rectę lineę NS, & H R, quæ contingent circulos N M O, & H G I, quia ducuntur ex loco cõtactus, vbi ſcilicet planum A C E F tangit circunferentias circulorum N M O, & HGI. Volens itaque Cardanus probare id, quod ſuperiùs ſupponebat dum petebat principium, nempe lineas N S, & H R tangere circulorum illorũ circunferentias; dicit ꝙ tangunt, quia ex loco contactus ducuntur. Mihi autem malè videtur deduci hæc cõſequentia: ex loco contactus ducuntur, ergo tangunt circulorum circunferentias. non eſt enim neceſſarium vt ipſas tangant, ſed poſſunt etiam eas ſecare, vtputa ſi ad lineam A C perpendiculares nõ fuerint, vel ſi etiam productæ Conũ ſecuerint. nam rectę lineæ circulos tangentes, de quibus hìc Cardanus loquitur, quas etiam Euclides definit in tertio libro Element. definitione ſecunda, illę ſunt, quæ in eodem plano cum circulo iacentes cùm circulum tangant, ſi

Notandum.

Quot modis Recta linea circulum secare possit.

producãtur circulum non secant. animaduertẽdum autem est ꝙ recta linea dupliciter circulũ secare potest: vel quando eius planum secat in eodem & ipsa plano iacens, vel quando eius planum secat in alio ipsa existens plano; hocq; dupliciter, vel intra circũferentiam, vel in circunferentia. quemadmodũ in præsentia lineæ, de quibus Cardanus sermonem habet quamuis ab ipsius plani K cum superficie conica contactu exeant, nihilominus possunt quandoque tangere circulum, quandoque verò secare, secundo scilicet modo secũdi modi secandi: non tangent autem nisi vnico tantùm eo modo, quem diximus. Cùm autem tribus his modis recta linea secare possit circulum, illam tantùm propriè Geometræ circulum secare dicunt, quæ primo secandi modo secat. Ita igi igitur probanda est hæc consequentia, quemadmodum nos eam in secunda nostra demonstratione probauimus; aliter paralogismus committitur. quandoquidem ex contactu ipsius lineæ, & ex propositione tricesimasexta tertij lib. Elem. Eucl. infertur paulo inferiùs in ipsa Cardani demonstratione (vt etiam in nostra secunda demonstra-

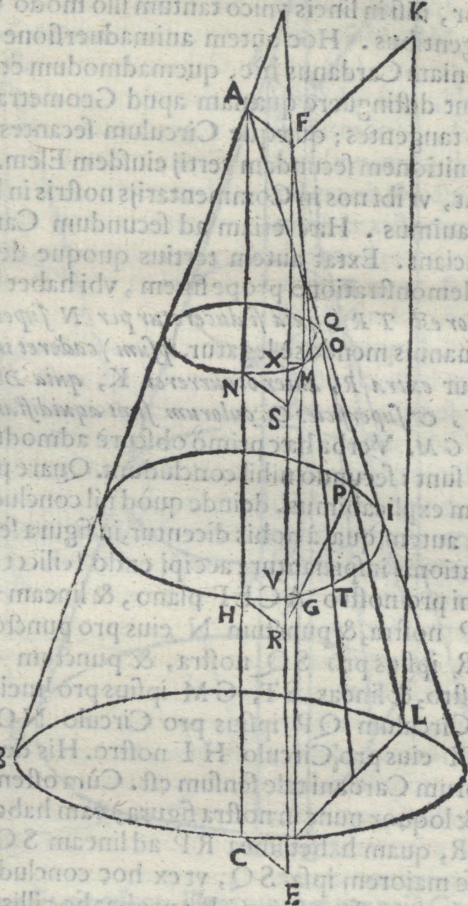
Tribus modis Recta linea circulũ secare potest.



demonstratione conspicere licet) quædam consequentia maximè necessaria ad concludendum Quæsitum, quippe quæ non verificatur, nisi in lineis vnico tantùm illo modo vti diximus Circulum tangentibus. Hoc autem animaduersione dignum esse censui, quoniam Cardanus hìc, quemadmodum etiam plerique alij nesciunt distinguere quænam apud Geometras rectæ lineæ Circulum tangentes; quæque Circulum secantes esse debeant; atque definitionem secundam tertij eiusdem Elem. penitus non intelligunt, vt ibi nos in Commentarijs nostris in Euclidem pleniùs adnotauimus. Hæc etiam ad secundum Cardani defectum dicta sufficiant. Extat autem tertius quoque defectus in ipsa Cardani demonstratione prope finem, vbi habet hæc verba. *Sed MN maior est TR (quia si duceretur per N superficies æquidistans, ipsa* (quanuis mendosè legatur, *ipsum*) *caderet iufra R*, sed meliùs legatur *extra R, aliter occurreret* K, *quia Diameter QP est minor XV, & superficies Circulorum sunt æquidistantes*) *igitur ST maior est GM.* Verba hæc primò obscurè admodum, atque concisè dicta sunt; secundò nihil concludunt. Quare primùm eorum sententiam explicabimus. deinde quòd nil concludant ostendemus. omnia autem, quæ à nobis dicentur, in figura secundæ nostræ demonstrationis inspiciantur; accipi endo scilicet planum K ipsius Cardani pro nostro ACEF plano, & lineam MN ipsius pro linea RP nostra, & punctum N eius pro puncto P nostro, & lineam TR ipsius pro SQ nostra, & punctum R eius pro puncto Q nostro, & lineas ST, GM ipsius pro lineis MS, GR nostris, & Circulum QP ipsius pro Circulo NO nostro, & Circulum YX eius pro Circulo HI nostro. His declaratis, dico quòd verborum Cardani tale sensum est. Cùm ostendisset ipse lineam MS (& loquor nunc in nostra figura) eam habere rationem ad lineam GR, quam habet linea RP ad lineam SQ; volens probare RP esse maiorem ipsa SQ, vt ex hoc concluderet etiam ipsam MS maiorem esse quàm GR: probat hoc illis verbis. *Sed MN maior est TR (quia si duceretur per N superficies &c.)* quæ verba in nostra figura sic legantur. Sed RP maior est SQ (quia si duceretur per punctum P planum Parallelum plano ACEF, ipsum vtique ductum planum caderet extra punctum Q; aliter occurreret ipsi ACEF plano, quia dimetiens Circuli NO est minor dimetiente Circuli HI, & plana Circulorum ipsorum sunt parallela) igitur

Tertius Cardani defectus.

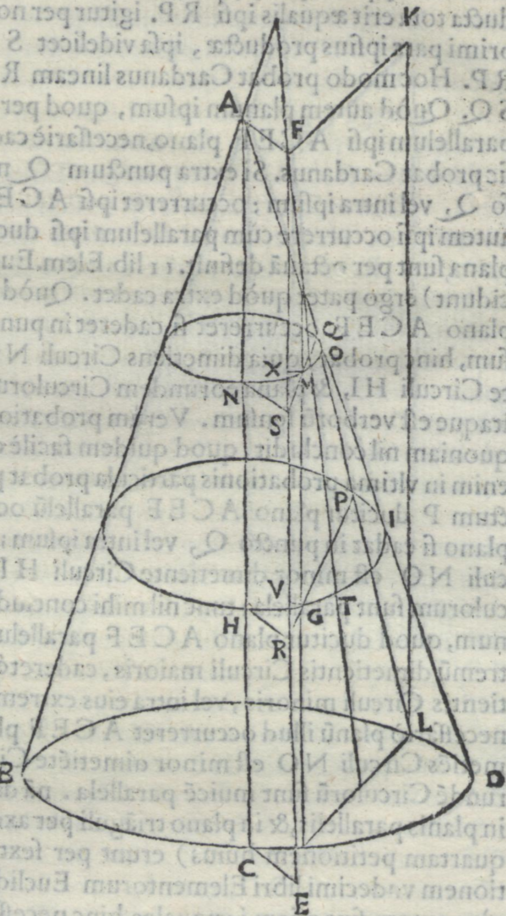
 MS maior



M S maior est quàm G R. Sic legi debét Cardani verba in nostra figura, quorum (si ita legantur) clara erit sententia. inquit.n. quòd R P maior est quàm S Q, hac scilicet ratione. quia si duceretur per punctum P planum vnum parallelum plano A C E F, ipsũ necessariò caderet extra punctum Q; cadens auté extra pũctũ Q, secabit se extra Conum cũ E F K L plano ipsius Hyperboles, & communis eorum sectio erit per tertiam propo. vndecimi lib. Elemẽ. Eucl. recta linea ipsi F E paralella per sextamdecimã propositionem eiusdem; cui quidem parallelæ occurret ipsa S Q si extra Conum producatur, quoniã S Q, & R P parallelæ sũt per eandem sextamdecimam cùm ex suppositione in parallelis sint planis: quæ autem cum vna parallelarum coincidit, cũ altera etiam coincidet si in infinitum producãtur per vltimam definitionem, & tricesimam propositioné 1. lib. Elemen. Eucl. Quare cùm iam dicta parallela occurrat ipsi S Q extra Conũ productæ, fiet vtique vnũ parallelogrammũ, cuius latera erunt ipsa parallela, & S Q producta,

cta, & S R, & R P. cùm autem parallelogrammorum latera opposita sint ęqualia per 34.proposit.eiusd. 1.Elemen.ergo S Q producta tota erit æqualis ipsi R P. igitur per nonã Com.Sent.eiusdẽ primi pars ipsius productæ, ipsa videlicet S Q erit minor quàm R P. Hoc modo probat Cardanus lineam R P esse maiorẽ quàm S Q. Quòd autem planum ipsum, quod per punctum P ducitur parallelum ipsi A C E F plano, necessariè cadat extra punctũ Q, sic probat Cardanus. Si extra punctum Q non caderet, sed in ipso Q, vel intra ipsum; occurreret ipsi A C E F plano: non potest autem ipsi occurrere cùm parallelum ipsi ducatur (parallela enim plana sunt per octauã definit. 11 lib. Elem. Eucl. quæ sibi non coincidunt) ergo patet quòd extra cadet. Quòd verò iam dictũ planũ plano A C E F occurreret si caderet in puncto Q, vel intra ipsum, hinc probat; quia dimetiens Circuli N O est minor dimetiẽte Circuli H I, & plana eorundem Circulorum parallela sunt. Hoc itaque est verborũ sensum. Verùm probatio hæc maximè peccat, quoniam nil concludit, quod quidem facilè cognoscitur. quando enim in vltima probationis particula probat planũ, quod per punctum P ducitur plano A C E F parallelũ occurrere ipsi A C E F plano si cadat in puncto Q, vel intra ipsum; quia dimetiens Circuli N O est minor dimetiente Circuli H I, & plana ipsorũ Circulorum sunt parallela: tunc nil mihi concludere videtur, nã si planum, quod ducitur plano A C E F parallelum, duceretur per extremũ dimetientis Circuli maioris, caderetque in extremo dimetientis Circuli minoris, vel intra eius extremũ, tunc sequeretur ꝙ necessariò planũ illud occurreret A C E F plano, propterea ꝙ dimetiẽs Circuli N O est minor dimetiẽte Circuli H I, & plana eorundẽ Circulorũ sunt inuicẽ parallela. nã dimetiẽtes ipsę cùm sint in planis parallelis, & in plano triãguli per axem Coni (vt patet per quartam petitionem huius) erunt per sextamdecimam propositionem vndecimi libri Elementorum Euclidis inuicem parallelæ: cùm autem sint etiam inæquales, hinc necessariò sequeretur quòd communis sectio plani triãguli per axem Coni, & ipsius plani, quod duceretur plano A C E F parallelum, si caderet in extremitate, vel intra extremitatem dimetientis circuli minoris; occurreret lineæ A C. nam si per terminos duarum linearum parallelarum, & inæqualium rectæ producantur lineæ: illas ad partem minoris parallelæ concurrere est necesse. quod Theorema verissimum est, &

ab Euclidis Elementis dependet, demonstraturq; à Vitellione in sextadecima propositione primi libri suæ Perspectiuæ. Cùm igitur lineæ illæ in vertice Coni sibi coinciderent, necessariò plana quoque illa duo, in quibus ipsæ sunt, ibidẽ sese tangerent. Hoc itaque pacto ratio Cardani concluderet, quòd scilicet plana illa sibi occurrerent propterea quod circulorũ dimetientes inæquales, & parallelæ sunt, quãuis hoc ad rem nõ esset. At quoniam planum illud non ducitur per extremitatem dimetientis circuli maioris, sed per punctum P; idcirco ratio non concludit. dimetientium enim inæqualitas, & parallela positio non est causa quòd planum ductum per punctum P plano ACEF parallelum, eidem ACEF plano occurrat (quandoquidem planum ductum per punctum P potest ita produci versus Coni Verticem, vt non tangat etiam ipsas dimetientes; tamen si in signo Q, vel intra ipsum caderet, cum plano ACEF concurrat) sed vera huius concursus causa est linearum RP, & SQ inæqualitas, & parallela



lela positio. Quòd si dicat aliquis ex inæqualitate dimetientium dependere linearum R P, S Q inæqualitatem, atque iccirco Cardanum ex inæqualitate dimetientium arguere: huic respondeo, quòd tunc fieret Petitio principij. quoniam quod probare vult Cardanus est inæqualitas linearũ R P, S Q, quam si immediatè, vel per aliud medium magis remotum supponat; dubio procul principium petit, idemq; probat per idẽ. talis.n.esset eius argumẽtatio. Dico q linea R P est maior S Q, quia si duceretur per signũ P planũ parallelum plano A C E F, caderet extra signũ R; aliter sequeretur hoc absurdum quòd dictum planũ occurreret eidem plano A C E F, cui parallelum ducitur; quia dimetiens circuli N O est minor dimetiente circuli H I, & plana ipsorum circulorum parallela sunt. hoc est quia linea R P est maior quàm S Q. qua quidem probatione nil vitiosiùs. Nullo modo igitur hæc Cardani demonstratio seruari potest, quoniam vel nihil concludit, vel principium petit, vt iam ostendimus. Quapropter non est eo modo probandum lineam R P esse maiorem linea S Q, quo Cardanus id probare conatur: sed ita vt nos in secunda nostra demonstratione dedemonstrauimus. Hæc itaque de tribus quoque insignioribus demonstrationis Cardani deliquijs dicta sint.

Obiectio.

Responsio.

DIGRESSIO CONTRA ORONTIVM.

RONTIVS autem Finæus in libello suo de Speculo ustorio Problema nobis propositum demonstrauit eo demonstrandi modo, quem nos in tertia nostra demonstratione sub perfectione, vniuersalique doctrina redegimus. Nam eius quidem demonstratio cùm maximas habet imperfectiones, tũ particulatim in Cono tantùm rectangulo propositum demonstrat: cùm tamen in omni Cono verum sit. Demonstrat autem Orontius præsens Problema non solùm de duabus lineis recta, & Hyperbolica in eodem plano iacentibus, verùm etiam de duabus dictis lineis nõ in eodẽ plano; sed in vna Coni superficie existentibus, quod nos quoque ad calcem tertiæ nostræ demõstrationis subiunximus. In his itaque duabus suis demonstrationibus præter multa deliquia, & infinitas constructionum, consequentiarumque rationes omissas (vt ex nostra tertia demonstratione quisque conijcere potest) quæ fortasse tolerari possunt; tres potissimùm errores commisit, qui nullo modo tolerandi sunt. Primus error talis est. Volens Orontius probare lineam N R (& loquor in figura nostræ tertiæ demonstrationis) maiorem esse linea P S, ex quo porrò tota illa dependet demonstratio: probat illud ex eo, quòd æquales rectæ lineæ ab inæqualibus circulis inæquales secant circunferentias, minorem quidem à maiori, maiorem verò à minori. Quòd autem hoc suum Theorema verum sit, sic ille confirmat. Quoniam (inquit) plus incuruatur minor, quàm ipse maior circulus. Quantùm autem ratio hæc debilis, inanisque sit, hinc intuendum est: quoniam nos in superioribus ostendimus quòd æquales rectæ lineæ ab inæqualibus circulis inæquales auferunt circunferentias non solùm minorem à maiori, & maiorem à minori; sed etiam maiorem à maiori, & minorem à minori circulo, in minoribus scilicet, atque maioribus circulorum segmentis; & tamen circulus minor semper plus incuruatur quàm maior. ea igitur ratio nulla est. Quare Theorema Orontij non vniuersè verum est, atque indemonstratum remanet, cùm eius ratio non concludat. & consequenter lineam N R linea P S maiorem esse indemonstratum relinquitur. Cùm autem ex

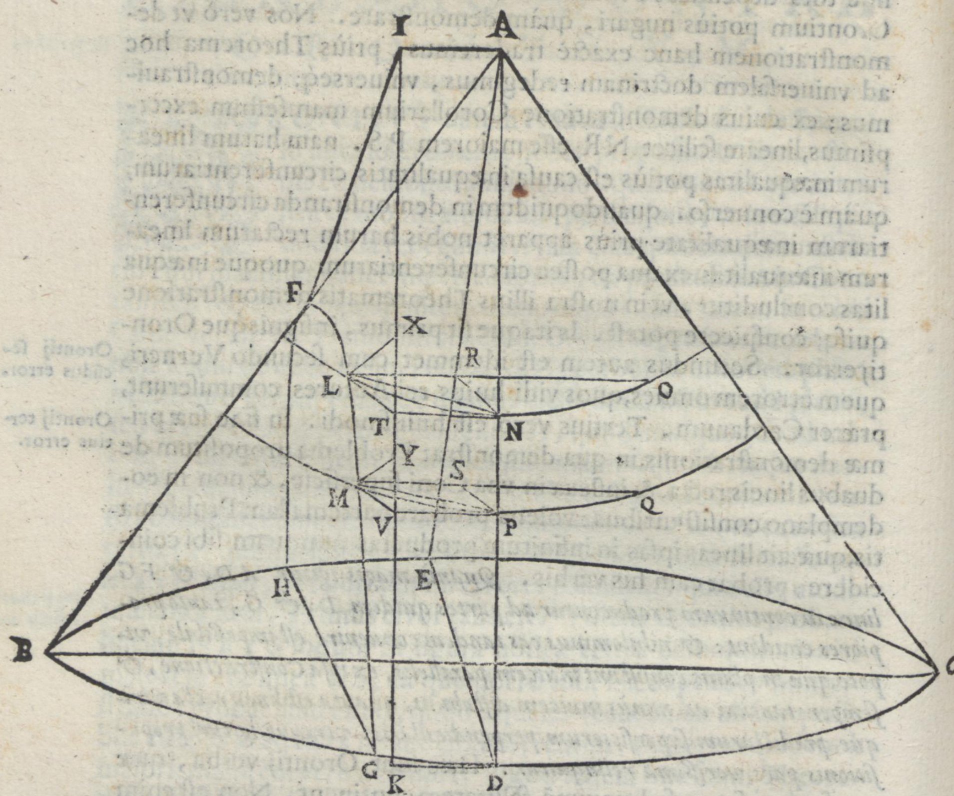
Orontij primus error.

hoc

hoc tota dependeat Problematis demonstratio, manifestum est Orontium potiùs nugari, quàm demonstrare. Nos verò vt demonstrationem hanc exactè traderemus, priùs Theorema hoc ad vniuersalem doctrinam redegimus, vniuerseq; demonstrauimus; ex cuius demonstratione Corollarium manifestum excerpsimus, lineam scilicet NR esse maiorem PS. nam harum linearum inæqualitas potiùs est causa inæqualitatis circunferentiarum, quàm è conuerso. quandoquidem in demonstranda circunferentiarum inæqualitate priùs apparet nobis harum rectarum linearum inæqualitas, ex qua postea circunferentiarum quoque inæqualitas concluditur. vt in nostra illius Theorematis demonstratione quisq; conspicere potest. Is itaque sit primus, insignisque Orontij error. Secundus autem est idemmet cum secundo Verneri, quem errorem omnes, quos vidi huius rei Autores commiserunt, præter Cardanum. Tertius verò est huiusmodi. In fine suæ primæ demonstrationis, in qua demonstrat Problema propositum de duabus lineis recta, & inflexa in vna Coni superficie, & non in eodemplano consistentibus: volens probare partem illam Problematis, quæ ait lineas ipsas in infinitum productas nunquam sibi coincidere; probat eam his verbis. *Quantò magis igitur AD, & FG lineæ in continuum producentur ad partes quidem D, & G, tantò propiores euadent: & nihilominus eas tandem conuenire est impossibile, vtpote, quæ in planis consistunt inuicem parallelis, ex ipsa Constructione, & semper tantùm ad minùs inuicem distabunt, quanta est linea recta vtrique prædictarum superficierum perpendicularis. vtraque igitur propositionis pars verissima relinquitur.* Hæc sunt Orontij verba, quæ per se clara sunt; sed maximã falsitatem continent. Non est enim verum quòd semper tantùm ad minùs illæ duæ lineæ inuicem distabunt, quanta est linea recta vtrique prædictarum planarum superficierum perpendicularis, vt ait Orontius; quoniam recta linea vtrique prædictorum planorum perpendicularis nullo modo potest esse ipsarum linearum distantia, cùm non ambas, sed alteram tantùm earum tangat. Quo nam pacto igitur duæ illę lineæ semper tantùm ad minùs inuicem distabunt, quãta est linea recta vtriq; duorum planorum, in quibus illę lineæ sunt, perpendicularis, cùm ipsa perpendicularis ipsarum linearum distantia esse minimè possit? Exempli gratia in figura Tertiæ nostræ Demonstrationis, quomodo linea FG inflexa à recta AD tantùm ad minùs distabit, quan-

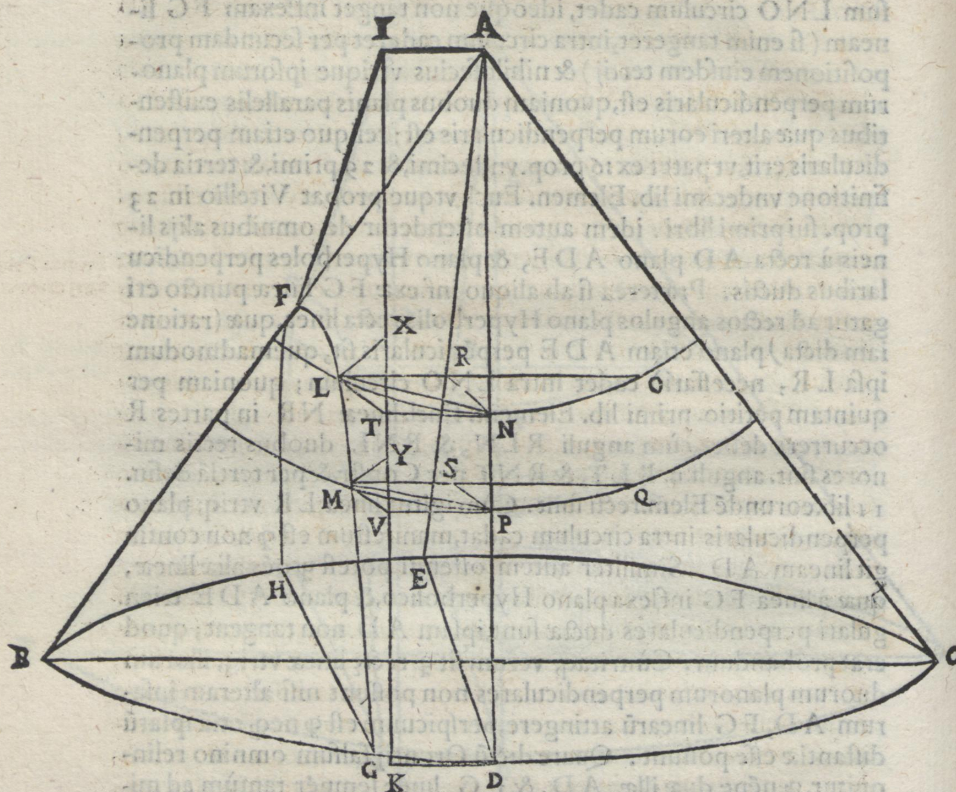
Orontij secũdus error.

Orontij tertius error.



ta est recta linea M S vtriq; tum Hyperbolis, tum per axem trianguli plano perpendicularis, cùm tamen ipsa M S ipsam A D non tangat, ideoq́ue earum linearum distantia esse non possit? quælibet enim duarum linearum distantia terminis suis ambas ipsas attingere debet. quòd autem recta linea vtrique illorum planorum perpendicularis, non possit nisi alteram ipsarum duarum linearum attingere, sic in eadem nostra figura probetur. Si ab aliquo puncto lineę A D erigatur recta linea ad rectos angulos plano A D E, vt ipsa N T; erit per tertiam definitionem vndecimi lib. Elem. Eucl. ad rectos angulos dimetienti circuli conicæ basi paralleli per punctum

ctum illud trāſientis. vnde per 16 prop.tertij lib.eorundē extra ipſum L N O circulum cadet, ideoque non tanget inflexam F G lineam (ſi enim tangeret,intra circulum caderet per ſecundam propoſitionem eiuſdem tertij) & nihiloſecius vtrique ipſorum planorum perpendicularis eſt,quoniam duobus planis parallelis exiſtentibus quæ alteri eorum perpendicularis eſt; reliquo etiam perpendicularis erit,vt patet ex 16 prop.vndecimi,& 29 primi,& tertia definitione vndecimi lib. Elemen. Eucl. vtque probat Vitellio in 23 prop. ſui primi libri. idem autem oſtendetur de omnibus alijs lineis à recta A D plano A D E, & plano Hyperboles perpendicularibus ductis. Præterea ſi ab aliquo inflexæ F G lineæ puncto erigatur ad rectos angulos plano Hyperbolis recta linea, quæ (ratione iam dicta) plano etiam A D E perpēdicularis ſit, quemadmodum ipſa L R, neceſſariò cadet intra L N O circulum; quoniam per quintam petitio. primi lib. Element. Eucl. lineæ N R in partes R occurrere debet,cùm anguli R L N, & R N L duobus rectis minores ſint. anguli.n. R L T, & R N T per Conſtr.& per tertiā defin. 11 lib.eorundē Elem.recti ſunt. Cùm igitur linea L R vtriq; plano perpendicularis intra circulum cadat,manifeſtum eſt ꝙ non contingit lineam A D. Similiter autem oſtendi poteſt ꝙ oēs aliæ lineæ, quæ à linea F G inflexa plano Hyperbolico,& plano A D E triangulari perpendiculares ductæ ſunt,ipſam A D non tangent; quod erat probandum. Cùm itaq; verum ſit ꝙ rectę lineæ vtriq; illorum duorum planorum perpendiculares non poſſunt niſi alteram ipſarum A D, F G linearū attingere,perſpicuum eſt ꝙ neq; etiā ipſarū diſtantiæ eſſe poſſunt. Quare dictū Orontij falſum omnino relinquitur,ꝙ nēpe duæ illæ A D, & F G linęę ſemper tantùm ad minùs inuicem diſtabunt,quanta eſt linea recta vtrique prædictorum planorum perpendicularis. Quum.n.lineæ L R, & N T ſint vtriq; plano perpendiculares,nullę aliæ ab eiſdem L, N punctis duci poſſunt lineę,quæ eiſdem planis perpendiculares ſint per 13 prop.vndecimi libri eorundem Elemen. at L R, & N T, omneſq; eiuſmodi lineę vtrique plano perpendiculares,nullo modo linearum A D, & F G diſtantiæ eſſe poſſunt; non diſtant igitur ſemper tantùm ad minùs inuicem, quanta eſt linea recta vtrique plano perpendicularis: imo ſemper maiori adinuicem interuallo diſtabunt, quàm ſit linea recta vtriq; ipſorum planorū perpendicularis. Si.n.à puncto L ad rectā A D lineā vna perpendicularis ducatur,erit per 19 propoſitio-



positionem primi libri Elemen. Eucl. maior quàm L R vtriq; plano perpendicularis; quoniam per tertiam defin. vndecimi lib. eorundem angulum rectum subtendit, eum scilicet, qui ad R signum est. Idẽ etiã verũ erit de oĩbus alijs lineis ab F G linea inflexa ad rectã A D perpendicularibus ductis. at ipsę perpẽdiculares (vt in superioribus dictum est) minimę sunt distantię ipsarũ F G, A D linearũ; plus ergo sẽper inuicẽ distabũt ipsę AD, FG lineę, quàm sit recta linea vtriq; duorũ iã dictorũ planorũ perpẽdicularis. Quãobrẽ patet etiã tertius Orõtij error. Hęc aũt ad Orõtiũ quoq; dicta sint.

DIGRES-

DIGRESSIO CONTRA PELETARIVM.



IACOBVS verò Peletarius in Commentario suo de Contactu linearum rem hãc, de qua laboramus, tetigit. & primùm quidem iuxta Priscorum viam rẽ ipsam breuiter demõstrare tentauit, & vsus est modo demonstrandi Cardani; sed breuiter quidem, ac imperfectè. nam alterũ Problematis membrum, nempe linearum continuam appropinquationem quodam apparẽti signo, debiliq; potiùs coniectura, quàm Geometrica ratione ostendit. Cùm enim (inquit ipse) latus Hyperbolis perpetuò, & gradatim ascendat versus Coni basin, propterea quòd Circuli, quibus Conus ipse cõstat, continuè maiores fiunt versus basim ipsam; recta autem linea, ad quam debet latus Hyperboles approximari, in suo plano immutabilis maneat: procul dubio (inquit) ipsa inflexa linea secũdùm augumentum Circulorum continuè etiam propior fiet ipsi rectæ lineæ. Hoc pacto membrum hoc demonstrat Peletarius. Quantùm autẽ ratio hæc imbecilla sit, à Geometricisque rationibus aliena, nemo est, qui non videat. nullã enim rei causam dicit, sed quandã potiùs probabilem imaginationem. quòd nanque Circuli versus Coni basin maiores semper fiant, latusque Hyperbolis perpetuò, & gradatim versus basim ascendat; verum, & necessarium est. non ex hoc tamen linearum cõtinua appropinquatio necessariò sequitur. Quid enim si quis rectam illam lineam, quæ à centro Hyperboles oritur, quamque in superioribus affectioni iam dictæ succumbere demõstrauimus; nõ debitis conditionibus protrahat? vtrùm cõtinuè lateri Hyperbolis perpetuò, & gradatim versus Coni basim ascendenti appropinquet, & nunquam coincidat? nonne posset etiam ita protrahi vt quantùm inflexa illa linea continnè ascendit, tantùm hæc, scilicet recta illam effugiat, ab eaque recedat? non est igitur causa huiusce affectionis necessaria illa, quam dicit Peletarius; sed contingens quædam, ac probabilis coniectura. quàm alienæ verò huiuscemodi rationes à Geometria sint, audiamus Aristotelem asserentem, simile esse à Rhetorico demonstrationes exigere, & Mathematico probabiliter disputanti assentiri: necnon in Platone Simmiam dicentem. *Quoniam ex apparentibus*

Primus Peletarij error.

Aristoteles 1. Ethic. c. 3.

rentibus demonstrantes vanos esse scio. Multùm itaque deficit Peletarius in iam dicti membri demonstratione. At in reliquo membro demonstrando maximum etiam passus est deliquium. probat enim illud eo modo, quo Cardanus. cùm autem ostendere velit planum, in quo est illa recta linea, quæ Hyperboli semper magis magisque annuere, & nunquam illi occurrere debet; non tangere Coni superficiem, nisi in vna recta linea iam dictæ rectæ lineæ parallela: tali vtitur ratione. Intelligatur (inquit) plana superficies super Cono iacens secundùm longitudinem, quæ quidem superficies vnica sui linea Conum tanget. constat enim ipsa infinitis lineis rectis, & Conus infinitis circulis: linea verò recta siue secet circulũ, siue tangat; eum in vnico puncto secat, & tangit. Hæc est ratio Peletarij, per quam demonstrare credit planum illud nullibi tangere Coni superficiem, quàm in illa recta linea. Quòd autem ratio hæc nil concludat, sic ostendemus. Primò quidem cum dicit. Linea verò recta siue secet circulum, siue tangat; eum in vnico pũcto secat, & tangit. falsum dicit. Nam nulla recta linea circulum secãs in vno tantùm puncto eum secare potest. Si enim in circuli circunferentia duo quælibet puncta suscepta fuerint, recta linea, quæ ipsa puncta coniungit, tota intra circulum cadit per secundam propositionem tertij libri Elementorum Euclidis: talisque linea iuxta Euclidis doctrinam dicitur secare circulum; quæ si etiam in infinitum vel ex altera, vel ex vtraque parte producatur, semper secans circulũ vocabitur. passim enim Euclides cùm de recta linea circulum secante facit mentionem, semper de illa recta linea intelligit, quæ intra circulum ab vno circunferentiæ puncto ad aliud transit. exempli gratia in tricesimasecunda propositione tertij libri eorundem Elemẽtorum cùm dicit *Si Circulũ tetigerit aliqua recta linea, à contactu autẽ ad Circulũ perducatur quædã recta linea Circulũ secans: anguli, quos ad contingentem facit, æquales erunt ijs, qui in alternis Circuli segmentis existunt, angulis.* Similiter cùm in tricesimasexta propositione eiusdẽ dicit *Si extra Circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in Circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem Circulum secet, altera verò tangat: quod à tota secante, & exteriùs inter punctum, & conuexam circunferentiam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à tangente describitur quadrato.* Ex his enim, multisque alijs locis manifestum est lineam Circulum secantem eam ab Euclide accipi, quæ circuli circunferentiam in duobus tantùm punctis secat, ipsum

Plato in Phędonẽ.

Secũdus Peletarij error.

ipsum verò Circulum in infinitis. recta nãque linea Circuli circunferentiã cùm bis secet, duobus in punctis secat (omnis enim linea lineam semel secans, in vnico duntaxat puncto secabit) recta verò linea planam figuram vndequaque clausam (qualis est Circulus) si secuerit, infinitis in punctis eam secabit, cùm infinita puncta in ipsa secante recta linea suscipi possint, per quæ figuram ipsam secat. de huiuscemodi igitur rectis lineis Circulũ secantibus omnes boni loquuntur Geometræ, de hisque eorum propositiones veritatẽ dicunt. quæ tamen nullo pacto Circulum, vel eius circunferentiam in vnico puncto secare possunt; sed circunferentiam quidẽ in duobus, Circulum verò in infinitis, vt ostendimus. Falsum igitur dicit Peletarius, cùm asserat rectam lineam in vnico pũcto Circulum secare. si enim Circulũ accipit pro figura plana (vt definitur ab Euclide, vtque ab omnibus optimis Geometris accipitur) quod dicit proculdubio falsum est: si verò Circulum pro Circuli circunferentia intelligit (vt plerique Geometriæ ignari faciunt) rursus falsum dicit. Si autem fortè dicat Peletarius Circulum ego pro circunferentia suscipio, & verum dico, quia rectam lineam secantem intelligo eam, quæ cùm secet circunferentiam in vnico puncto, adhuc non peruenit, vel peruenire non potest ad aliud eiusdem circunferentiæ punctum vt in duobus punctis eam secet, atque idcirco in vnico tantùm puncto eam secabit: huic obiectioni sic occurrendũ est. Linea recta secans Circuli circunferẽtiam dupliciter accipi potest, aut in eodem plano, in quo est ipsa circunferentia, aut non in eodem. quòd si fuerit in eodem plano, atque (vt in obiectione dicitur) ad aliud circunferentiæ signum adhuc nõ peruenit, hæc vtique cùm per secundam petitionem primi libri Elementorum Euclidis in directum, & continuum produci possit; proculdubio in altero quoque puncto circunferentiam ipsam secabit. quare falsum erit dicere quòd linea recta circunferentiam secans, in vnico tantùm eam puncto secat, cùm in alio quoque puncto eam secare possit. At si recta linea circunferentiam secans non in eodem cum ipsa plano fuerit, ideoque ad aliud circunferẽtiæ signum peruenire nõ potuerit; quanuis talis linea (de qua reuera Peletarius impropriè locutus intelligit) circunferentiam in vno tantum puncto secet: tamen impropriè secans circunferentiam, vel secans Circulum dicitur, quoniam nulla alia recta linea secans Circulum, vel Circuli circunferentiam propriè à peritis in Geometria vocatur, præter illã,

Obiectio.

Responsio.

quam

quam iam diximus. Quòd si etiam secans circunferentiam, vel Circulum impropriè talis recta linea vocari admittatur, dico quòd ratio Peletarij nil concludit. Intelligatur enim (quemadmodum ait ipse) planum super Conicam superficiem iacens secundùm lõgitudinem. si itaque planum hoc vnica sui linea tangere Conum ea ratione probetur, quia scilicet planum ipsum infinitas in se recipere possit rectas lineas, & Conica superficies infinitos parallelos Circulos, recta verò linea siue secet Circulum, siue tangat; eum in vnico puncto secat, & tangit: dico quòd nihil concluditur. nã omnes quidem rectæ lineæ, quæ Circulos illos tangunt; in vnico puncto tangent, atque extra Conum totæ cadent per sextãdecimam propositionem tertij libri Elementorum Euclidis, & eius corollarium. non omnes autem rectæ lineæ, quæ Circulos illos secant, quanuis in vnico etiam puncto secent, totæ extra Conum cadẽt: sed possunt esse quædã rectæ lineæ, quæ in vnico puncto Circulos illos eo modo impropriè secent, & tamẽ totæ intra Conum cadent; & planũ, in quibus illæ sunt, Conum secabit. non concludit igitur ratio hæc: rectæ lineæ Circulum in Coni superficie iacentem tangentes, vel secantes in vnico tangunt, vel secant puncto; ergo planum, in quo sunt illæ rectæ lineæ, vnica sui linea Conum tãget. potest enim etiã non tangere, sed secare, vt iam diximus. Aliter autem hoc probãdum est, quemadmodum nos tum directè, tum indirectè in secunda nostra demonstratione id demonstrauimus. Duos itaque iam dictos cõmisit errores Peletarius in demonstrãdo proposito Problemate breuiter, atque concisè iuxta Antiquorum demõstrationem. Cùm autem hoc modo rem ipsam demonstrasset; subiungit quòd ea inuentio Antiquorum est acuta quidem, & Geometrica prorsus: sed quæ non explicet ex quo genere linearum sit ea, quæ in eodem plano rectæ lineæ semper magis ac magis appropinquat, nunquã ipsi coincidens. non nullis enim (inquit ipse) videri possit recta, propterea quòd rectissimè procedere videtur in superficie Coni, quod Cælius Calcagninus putauit. Quamobrem (inquit) locus postulat vt lineæ illius ortum, rationem, naturamq́ue ob oculos ponam. subiunxitq́ue demum duas illas imperfectas demonstrationes, quas nos superiùs perfectione donauimus; per easq́ue cùm propositum Problema duobus modis demõstrare, tum dictæ lineæ naturã manifestare voluit. In hac autem parte toto cœlo errare mihi videtur. cùm enim dicit Antiquorum inuentionem non

Tertius Peletarij error.

expli-

care ex quo genere linearum, sit illa iam dicta linea, magnoperè hallucinatur. Nam Apollonius quidem in duodecima propositione primi libri Conicorũ pulcherrimè ortũ, & formam, & naturam, propriamq; eius affectionẽ explicat; quibus omnibus à circulari, & recta distinguitur; inter mistasq; lineas collocatur, & vocatur Hyperbole: vt etiã ipse Peletarius sibi cõtradicens fatetur cùm dicat. *Neque dubium est quin ipsa ex earum sit genere, quas ex Apollonio proponunt, latus scilicet Hyperboles*. Præterea Geminus antiquissimus in Geometria, omnique laude dignus scriptor (referente Proclo in libro secundo Commentariorum in primum librum Euclidis Elementorum Commentario quarto) lineas quidem bifariã diuidebat, in simplices nempe, & mistas: & simplices quidem, in rectas, & circulares; mistas verò, in planas, & solidas: & planas quidem, in sibi coincidentes, vt Cyssoides; & in eas, quæ in infinitum producuntur, vt Helices: solidas verò, in eas, quæ circa Solida sine vlla ipsorum Solidorum sectione describuntur, quales sunt Helices circa Sphæram, vel Conum, vel Cylindrum descriptæ; & in eas, quæ ex Solidorum sectione oriuntur, vt tres Conicæ Sectiones, Parabole scilicet, Hyperbole, & Ellipsis. Eccè quàm dilucidè Geminus, & Proclus declarant illius lineæ naturam esse non rectam, neque circularẽ, sed ex his mistã. Aristoteles etiã in primo de Cœlo tres ait esse motus rectum, circularem, & tertium ex his mistum; quoniam (inquit) tres sunt etiã lineæ, recta, & circularis, & ex his mista. cùm autẽ linea illa, de qua loquimur, neque recta, neque circularis sit, sed Hyperbole; necessariò ex genere mistarum erit. Ioannes etiam Vernerus Problema, de quo agimus, sic proposuit. *Duas producere lineas alteram rectam, alteram inflexam, quæ Hyperbole Coni Sectio est, quæ quantò ampliùs producuntur, eò magis vicissim appropinquant, nunquàm coincidentes, etiam si in infinitum producantur*. Similiter Hieronymus Cardanus sic Problema proponit. *Duas inuenire lineas in eodem plano, quarum altera erit recta, reliqua latus Hyperboles, quæ semper sibi inuicem magis approximabuntur, & nunquam se tangent*. Omnes itaque tam Prisci, quàm Recentiores Autores lineam hanc Hyperbolem, ac propterea ex genere mistarũ esse explicãt, præter Calcagninum, qui reuera deceptus est; quoniam in Epistola, quam scripsit ad Iacobũ Zienglerum, ambas iam dictas lineas rectas esse ait. Malè igitur Peletarius Antiquorum inuentionem, mentemq; percepit, cùm dicat eos genus illius lineæ non explicasse. Verùm in

Apollonius.

Geminus.

Proclus.

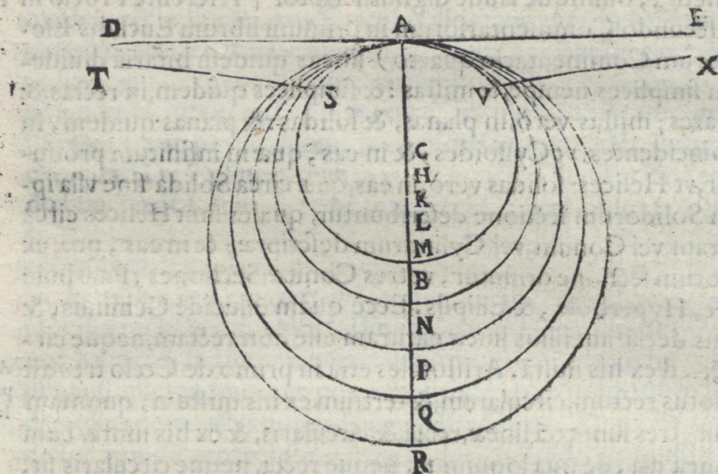
Aristoteles primo de Cœlo tex. 5.

Io. Vernerus.

Cardanus.

Cœlij Calcagnini error.

duabus illis demonstrationibus, in quibus ipse ortum, rationem, & naturam illius lineæ ob oculos ponere inquit, in multos etiam insigniores errores ellapsus est. quos vt facilè possimus ostendere, verba eius in medium adducemus, quæ sunt huiusmodi *Sit itaque Circulus A B A, cuius centrum C, & diameter A B: sitq́ linea recta D E circulum tangens in A puncto. tum inter duo puncta C, & B diametri suscipiatur plura cētra (ac nūc quatuor suscepisse satis sit) H, K, L, M.*



super quibus describantur quatuor circuli A N A, A P A, A Q A, & A R A, transeuntes inter D E rectam, & A B A peripheriam, seq́ inter se tangentes interiùs in A puncto. Et manifestum est, horum quatuor Circulorum peripherias paulatim, & per momenta propiores fieri ipsi rectæ D E, prout maiores fiunt. Iam sumatur punctum S in peripheria A N proximè A punctum: post in peripheria A P, aliud punctum, quod propiùs accedat ad rectam D E, quàm punctum S. Quod quoniam sua nota commodè signari nequit, vocetur punctum secundum. Sit deinde in peripheria A Q aliud punctum, quod propiùs sit ipsimet D E, quàm punctum secundum, dicaturq́ punctum tertium. Demum in peripheria A R, sit punctum propiùs accedens ad eandem D E, quàm tertium: atque hoc nominetur punctum quartum. Sicq́ continuè intelligantur

figantur circuli duci per contactum A, prioribus maiores, quorum centra in AB linea: atque in ijs notentur ordinatim puncta propiora lineæ DE. Tandem per hæc puncta primum, secundum, tertium, quartum, & si qua essent plura, ducatur linea ST: quam manifestum est paulatim accedere ad DE, non secus quàm circulorum puncta, per quæ ipsa educitur: & tamen nunquam coniungi posse cum ipsa, etiam si ambæ infinitè protrahantur, scilicet si infiniti ducantur circuli, per quos transeat ST. Quotquot enim ducentur, ij vnico puncto A tangent lineam DE, ex 15 prop. tertij lib. Elem. Eucl. Cõstat igitur lineã ST vtcunq; accedat ad lineam DE, cùm ea nunquã conuenire posse. Et quidem hoc ipsum intelligi volo in alteram partem de linea VX. Hæc est prima Peletarij demonstratio, quæ maximam habet imperfectionem, & primùm in hoc peccat, quòd non docet Geometricam inuentionem punctorũ illorũ, per quæ linea illa inflexa, & mista transire debet: sed absolutè inquit accipi punctum secundum, quod propiùs accedat ad ipsam rectam DE lineam quàm primum: & similiter tertium, quod propiùs sit ipsimet quàm secundum: & quartum demum propiùs accedens ad eandem quàm tertium; sicque continuè. quasi per se manifesta essent talia punctorum illorum loca, vel quasi vbicunque ea quis accipiat intentum haberet. Quid autem si quis accipiat illa puncta continuè propiora tangenti DE rectæ lineæ, sed non eo ordine, quo nos in nostra decima demonstr. docuimus; vtrùm ei Quæsitum benè succedat? Nonne posset quis illa puncta sic suscipere, vt posteriora quidem prioribus magis ad rectam DE lineam accederent: Hyperbolicam autem lineam minimè crearent? Dubio procul hoc in figura superiùs à nobis allata inspicienti, considerantique conspicuum est. Necessarium igitur erat puncta illa determinatè ostendere, atque demonstrare, vt nos ibi fecimus. Cùm enim Peletarius sic puncta illa indeterminatè accipi iubeat, idem est ac si duas illas lineas ita vt ab initio proponitur designare iuberet; quæ quidem est pura petitio principij. Præterea cùm dicit punctum primum S accipi debere proximè A punctum, quandam determinationem imponere videtur, quæ vana est. nil refert enim si punctum primum accipiatur vel proximè contactum A, vel etiam remotissimè ab eo, in extremitate scilicet dimetientis primi circuli contactui opposita: dummodo reliqua puncta omnia ad easdem partes, & rectæ DE tangenti lineæ semper propinquiora sumantur. Determinationem igitur posuit Peletarius,

Quartus error Peletarij.

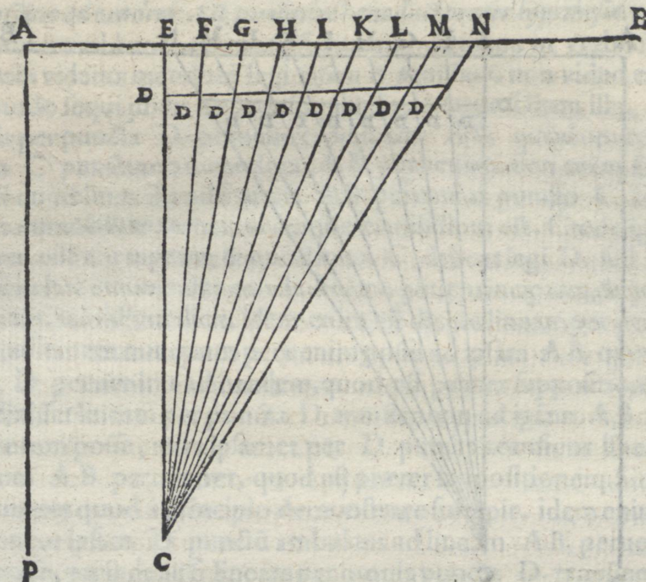
Quintus error Peletarij.

rius, vbi necesse non est; illamque omisit, quæ summopere necessaria erat, & in qua demonstrationis tota vis consistit. At neque etiam ratione probauit lineam illam esse Hyperbolicam, sed potiùs quadam hoc friuola persuasione confirmauit, dicens, *Hæc igitur linea mistam habet naturam ex recto, & circulari: atque ob id inter vtrunque perpetuò consistit: constatq́ infinitis lineis, in se quodam modo recuruis, seu refractis. Sed cùm circuli per A ducti, contigui propter infinitatem intelligantur, fit vt linea ST, aut VX, vix aliter sensui quàm pro vnica linea obijciantur. vbi verò spatia interijciuntur, manifesta euadit lineæ conformatio mista. Neque dubium est, quin ipsa ex earum sit genere, quas ex Apollonio proponunt, latus scilicet Hyperboles.* His verbis probat ipse cuiusmodi sit genus illius lineæ. Sed hæc debilis potiùs persuasio mihi videtur, quàm Geometrica ratio. possunt enim ex multis, infinitisque lineis in se quodam modo recuruis, seu refractis aliæ quoque lineæ creari tum simplices, tum mistæ: simplices quidem, vt lineæ refractæ, quas compositas Geminus vocat: mistæ verò, vt Parabole, Ellipsis, Cyssoides, Helix plana, & aliæ huiusmodi, quæ tamen Hyperbolicæ non sunt, neque Hyperboles passionem illam subeunt. Cùm autem ait, *Neque dubium est, quin ea ex earum sit genere, &c.* sibi contradicit in ijs, quæ superiùs dixerat. quòd scilicet antiqui ex quo linearum genere illa sit non explicent. In secunda verò duarum illarum demonstrationum adhuc quosdam commisit errores prioribus insigniores, qui etiam vt commodè agnoscantur, verba eius subscribam. *Atque adeo vt eius lineæ designationem rursus sensui euidentiorem exhibeam, aliud inuentum ascribam, mihi à Mathia Schenckio, ludi literarij apud Augustanos magistro, mechanicè quidem monstratum: sed quod in demonstrationem redigere placuit. Est enim ob linearum rectarum, quæ solæ hic requiruntur, constitutionem perspicua. Ea verò est huiusmodi. Sit recta linea AB, in qua incidat recta CDE: quæ ab ipso extremo E sic sensim moueatur versus terminum B, vt eadem ipsa extremitate E continuos faciat angulos cum linea AB: veluti apparet in punctis F, G, H, I, K, L, M, N: per quæ sic transit extremitas E, vt portio quidem CD semper longior fiat, prout inclinat linea CDE in lineam AB. Sed portio DE semper vna, eademq́ maneat: scilicet vt sint DE, DF, DG, & reliqua deinceps inter se æquales: ipsa verò CDE sic ambulet, vt nunquam discedat à puncto C immobili: nimirùm vt spatium CE perpetuò sit idem.*

Sextus error Peletarij.

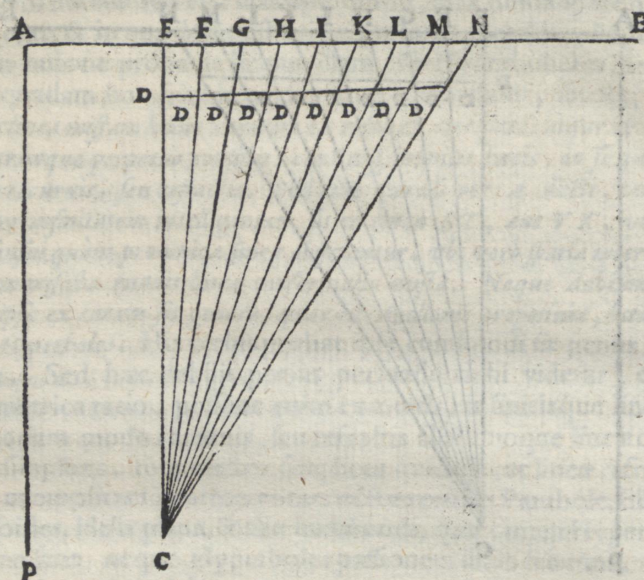
Septimus error.

Mathias Schenckius.



idem. Ac iam manifestum est, punctum D continuè propiùs admoueri ipsi A B lineæ, prout anguli qui ad F, G, H, I, cæteriq; deinceps, acutiores paulatim fiunt: neque tamen ad ipsam peruenire posse. sic enim oporteret ipsum C punctum ad eandem A B peruenire: quod est præter hypothesin: quum ipsius distantia à lina A B, vna esse ponatur. Iam si per singula puncta D ducatur linea, vtiq; continuè propiùs accedet ad rectam A B: neq; vspiam cum ipsa coibit, sicut neq; punctum ipsum D ambulans. Ex quo habetur ratio expeditissima describendi eiusmodi lineas: quæ tantò facilior est cæteris, quantò minùs indiget Circulorum officio. Quod tamen huc etiã poterit adhiberi. nimirum si ducatur perpendicularis A P: in qua statuantur centra Circulorum inæqualium: quorum vnusquisque educatur per punctum A, ad contactum scilicet rectæ lineæ A B, & per singula puncta D: velut in superiore demonstratione fecimus. Sed eos Circulos hìc non descripsimus, ne figurationem conturbarent. Hæc est secunda Peletarij demonstratio, quæ potiùs mechanicum quoddã opificium est, quale ipsi à Matthia SchencKio fuit ostensum, quàm Geometrica demonstratio, licet ipse in perspicuam demonstratio-

nem



nem id redegisse dicat. perspicua verò eius demonstratio talis est, quòd nil concludat. Nam volens probare cōtinuam iam dictarum duarum linearum appropinquationem, tali ratione vsus est. *Ac iam manifestum est punctum D continuè propiùs admoueri ipsi A B lineæ, prout anguli qui ad F, G, H, I, cæteriq; deinceps, acutiores paulatim fiunt.* Quæ quidem ratio mihi videtur esse maxima nugatio. Quomodo enim angulorum illorum diminutio, linearum ipsarum appropinquationis est causa. nam posita causa ponitur & effectus. at si ponatur ipsa angulorum diminutio, propinquitas linearum minimè ponitur. possumus enim creare quandam etiam inflexam lineam ab ipsa A B continuè magis atque magis recedentem, cùm tamen illorum angulorum eadem continua diminutio maneat. Quoniam igitur nullam aliam huiusce rei causam præter hāc affert Peletarius, nugari potiùs quàm demonstrare mihi videtur. Quomodo verò pars hæc Problematis iuxta hāc viam exquisitè demōstrari debeat, in vndecima demōstratione nostra docuimus. Rursus volens Peletarius reliquam Problematis partem demonstrare, dicebat. *Neq; tamen ad ipsam peruenire posse. Sic enim oporteret ipsum*

Octauus error.

Nonus Peletarij error.

C pun-

C punctum ad eandem A B peruenire: quod est præter hypothesin, quum ipsius distantia à linea A B vna esse ponatur. Quibus in verbis primò mihi videtur mendosè legi *ipsum C punctum.* non video enim quomodo sequi possit hæc consequentia; nempe si linea illa, quæ transit per puncta D perueniret ad ipsam A B, quòd oporteret ipsum C punctum ad eandem A B peruenire. fieri enim facilè potest quòd linea illa ad lineam A B perueniat puncto C in loco suo immobili manente, vt cuique manifestum est. Credo igitur literam esse corruptam, & quòd loco C debeat legi D. sed si ita sit, nil in hac etiam parte concludit, imo petit principium, & quoddam maximè falsum dicit. idem enim est dicere lineam per puncta D transientem nunquam peruenire posse ad ipsam A B, quia pũctum D perueniret ad eandem, quod est præter suppositionem; ac si dixisset lineam per puncta D transientem ad ipsam A B peruenire non posse, quia ipsamet per D puncta transiens linea ad eandem A B perueniret, quod est præter suppositionem. Sicque supponeret quod à principio demonstrare suscepit. idem enim est supponere ipsum D punctũ ambulans ad lineam A B peruenire non posse, perinde ac si lineam per omnia puncta D transientem ad eandem A B lineam nunquam peruenire posse supposuisset.

Præterea quoddam maximè falsum subiunxit. Cùm enim dixisset esse præter suppositionem quòd punctum D ambulans possit vnquam ad lineam A B peruenire, volens ostendere hoc esse contra suppositionem, subdidit. *quùm ipsius distantia à linea A B vna esse ponatur.* Quasi dicat vnam, eandemque puncti D ambulantis à linea A B distantiam suppositam fuisse, quoniã scilicet lineæ D E, D F, D G, D H, & reliquæ eiusmodi æquales adinuicem positæ fuerant. Verùm quòd quidem ipsæ D E, D F, D G, D H, & eiusmodi aliæ non sint veræ distantiæ puncti D à linea A B; hinc manifestum est, quia perpendiculares non sunt: quòd autem veræ distantiæ puncti D ab ipsa A B linea eædem esse supponi nõ debeant, hinc etiam patet, quòd linea per puncta D transiens ad ipsam A B magis ac magis accedere demonstranda est. Quomodo igitur vndequaque falsum non est quod dicit Peletarius, nempe ipsius D puncti ambulantis ab ipsa A B linea distantiam vnam supponi? Si nanque de veris distantijs hoc intelligatur, omnino à veritate alienum est: si autem de non veris distantijs; impropriè quidem dictum, nilque concludens propter petitionem principij, Decimus error.

Vndecimus error Peletarij.

vt iã ostensum est. Postremò denique volens Peletarius ostendere quòd in hac etiam secunda Constructione, & figura possunt describi Circuli præcedentis Cõstructionis, atq; eodem modo hìc quoque propositum concludi: dixit quòd hoc fieri poterit, si ducatur perpendicularis A P, in qua statuantur centra Circulorum inæqualium, quorum vnusquisque educatur per punctum A, ad contactum scilicet rectæ lineæ A B, & per singula puncta D: velut (inquit) in superiori demonstratione fecimus. Animaduertendũ autem est quòd alio hìc artificio Circuli describendi sunt longè diuerso à superiori describendi modo. nam ibi quidem centra circulorum ad libitum in ipsa A B recta linea accipiebantur, quoniam circuli per nullum aliud punctum nisi per punctum A transire debebant. hìc verò cùm circuli describendi non solùm per signum A, verumetiam per omnia signa D iam data transituri sint: idcirco quodam alio indigemus artificio, per quod centra ipsorum circulorum describendorum in A P linea reperiantur. hoc autem artificium non docuit Peletarius, cùm in hac parte multùm deficiat: nos verò incalce ipsius vndecimæ nostræ demonstrationis ad hoc etiam suppleuimus. Hæc demum ad Peletarium quoque dicta in præsentia sufficiant. aliàs enim maximos huius viri defectus, erroresque tum in eius Commentarijs in Euclidem, tum in tribus suis Commentarijs de Dimensione circuli, de Contactu linearum, & de Constitutione Horoscopi pleniùs ostendemus.

LIBELLI RABBI MOYSIS NARBONENSIS DILVCIDATIO.

Proëmium.

OSTENSIS iam, atque declaratis Autorum defectibus, reliquum est vt dilucidemus Rabbi Moysis Narbonensis libellum in Italica lingua scriptum, Mantuæq; impressum anno à Natalibus Christi M. D. L. cui titulus est. Opus nouum Geometricum ad demonstrandum quomodo super vna plana superficie duæ lineæ possint exire, quæ procedentes semper inuicem appropinquent, nunquam tamen sibi occurrant. In eo itaque Libello ipse Rabbi Moyses post quoddam breue proëmium, per quod intentionem suam proponit; se nempe demonstraturum Problema illud admirandum in Geometria, quippequod nos iam vndecim varijs modis demonstrauimus: decem & octo propositiones in medium affert, quibus totum propositum absoluit, demonstratq; primùm rem ipsam haud dissimili demonstratione à nostra prima superiùs allata; deinde quodam etiam exemplo, quod magis sensu percipi potest rem apertiùs declarat. Ex illis autem decem & octo propositionibus nouem quidem sunt Quæsito conferentes, reliquæ verò Quæsito propriæ, ipsumq; demonstrantes. Talis quidem est ipsius Rabbi Moysis in eo Libello intentio, libelliq; diuisio.

s li- Titulu bri.

Propositum Rabbi Moysis.

Diuisio libri.

Obscuritatis causæ.

diuisio. Qui porrò maximè obscurus est tum quoniam ex Hebraico sermone in Italicum malè fuit tralatus: tum quia multis in locis mendosè legitur: tum demum quòd Autor ipse propositiones suas non demonstrat rationibus Geometricis, sed duntaxat proponit eas, exemplisq́; numerorum confirmat: adde etiam quia ipse quædam omisit, quæ necessariò declaranda, demonstrandaq́; erant.

Propositũ Dilucidatoris.

Quare Libellum hunc nobis dilucidare volentibus opus est propositiones illas latinitate fideliter donare, & mendis expurgare, Geometricisq́; rationibus demonstrare, ac demum ea adijcere, quæ ab Autore prætermissa fuere. Sit igitur prima Propositio huiusmodi.



PRO-

PROPOSITIO PRIMA, THEOREMA I.

SI trianguli vni lateri quotlibet rectæ lineæ parallelæ duo reliqua eius latera ſecantes ducantur: triangula partialia in eo facta ſibiinuicem, & toti ſimilia ſunt. **Propoſitio.**

Probatur hæc Propoſitio per ſecundam partem viceſimænonæ propoſitionis primi, & quartam propoſitionem, & primam definitionem ſexti libri Elementorum Euclidis. **Demonſtratio.**

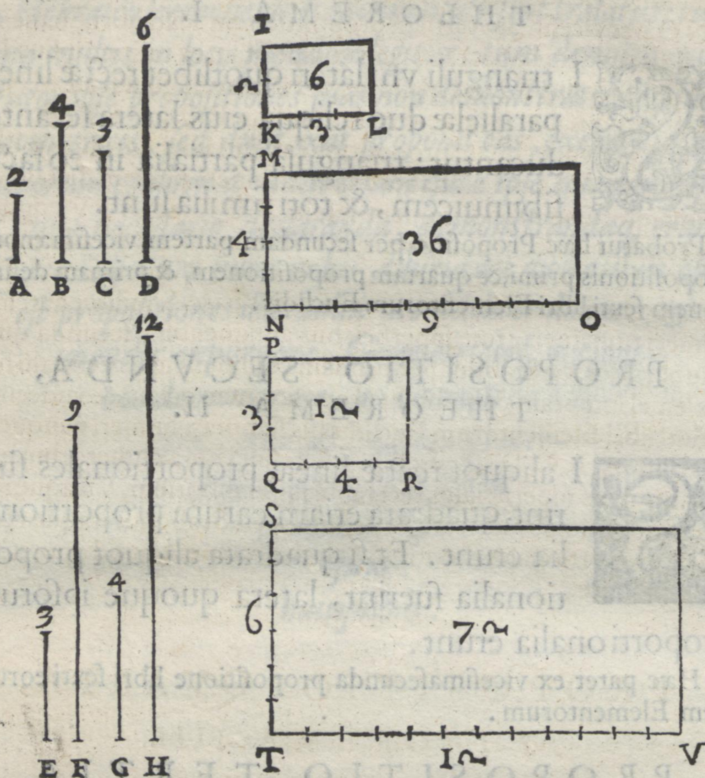
PROPOSITIO SECVNDA, THEOREMA II.

SI aliquot rectæ lineæ proportionales fuerint, quadrata etiam earum proportionalia erunt. Et ſi quadrata aliquot proportionalia fuerint, latera quoque ipſorum proporti onalia erunt. **Propoſitio.**

Hæc patet ex viceſimaſecunda propoſitione libri ſexti eorundem Elementorum. **Demonſtratio.**

PROPOSITIO TERTIA, THEOREMA III.

SI aliquot rectæ lineæ proportionales ab aliquot totidem numero rectis lineis pro portionalibus multiplicentur: rectangula ab illis contenta proportionalia erunt. Similiter ſi aliquot proportionales numeri alios totidem numeros proportionales multiplicent: qui producuntur, proportionales erunt. **Propoſitio.**



Expoſitio. Sint quatuor rectæ lineæ A, B, C, D proportionales, ſcilicet vt A ad B, ſic C ad D; & quatuor aliæ E, F, G, H proportionales, nempe vt E ad F, ſic G ad H; & multiplicetur A ab E, & fiat rectangulum IKL: & B ab F, & fiat MNO: & C à G, & fiat PQR: & D ab H, & fiat STV. *Determinatio.* Dico quòd ſicut IKL rectangulũ ad ipſum MNO, ſic PQR ad STV. *Demonſtratio primæ partis.* Cùm.n.ratio quidem IK ad MN eadem eſt cum ratione PQ ad ST, ratio verò KL ad NO eadem cũ ratione QR ad TV ex ſuppoſitione: erit ratio cõpoſita ex rõnibus PQ ad ST, & QR ad TV eadẽ rationi

compoſitæ

compositæ ex rationibus IK ad MN, & KL ad NO per primam communem sententiam huius. At rectangulum etiam IKL ad MNO per vicesimam tertiam propositionem sexti libri Element. Euclidis eandem habet rationem compositam ex ratione ipsius IK ad MN, & ipsius KL ad NO: ergo IKL rectãgulum ad MNO compositam habet rationem ex rationibus PQ ad ST, & QR ad TV per vndecimam propositionẽ quinti libri eorundem Elementorum. sed eandem habet etiam rationem per iam dictam vicesimamtertiam propositionem ipsum PQR ad STV. igitur per eandem vndecimam quinti ratio rectanguli IKL ad rectangulum MNO eadem est rationi ipsius PQR ad ipsum STV rectangulum. quæ est prima propositionis pars. Similiter autem si numeri tum lineis, tum superficiebus adsignentur; secunda quoque pars demonstrabitur per primam communem sententiam huius semel sumptam, & quintam propositionem octaui, & vndecimã quinti libri Elementorum Euclidis bis sumptas. numeri nanque linearum A, B, C, D; & E, F, G, H, erunt latera numerorum planorum areas superficiales rectangulas denotantium. Vtraque igitur propositionis pars vera, & perspicua est. Si aliquot itaque rectę lineæ proportionales fuerint, & reliqua vt supra. quod oportebat demonstrare.

Conclusio primæ partis.

Demonstratio secundæ partis.

Conclusio vniuersalis.

PROPOSITIO QVARTA,

THEOREMA IIII.

IN præsenti propositione applicat Rabbi Moyses affectionem pręcedentis Theorematis quibusdam rectis lineis proportionalibus, quæ in duobus simul iunctis triangulis sunt. Nõ indiget autem probatione, quia per præcedentem patet. Nos verò ne tot demonstrationibus, & figuris legentium mentem conturbemus: nullum huius propositionis exemplũ subijcimus, idemque in prima, & secunda propositione fecimus, faciemusque in multis alijs sequentibus. Satis enim erit si percepta ex Elementis Euclidis earum veritate, ipsas demum præcipuo nostro proposito applicauerimus.

PROPO-

PROPOSITIO QVINTA.
THEOREMA V.

Propositio.

I ab aliquo puncto dimetientis Circuli ad circunferētiam recta linea ad angulos rectos ducatur: erit quod à dimetientis partibus ab illa perpendiculari abscisis continetur rectangulum æquale quadrato ipsius perpendicularis.

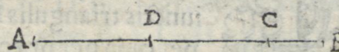
Demonstr. Hæc probatur per tricesimamprimã prop. tertij, & per corollarium octauæ propositionis sexti, & per primam partemdecimæ septimæ propositionis eiusdem sexti libri Elementorum Euclidis.

PROPOSITIO SEXTA.
THEOREMA VI.

Propositio.

I recta linea secetur vtcunque, deinde alterum ex eius segmentis per medium secetur: rectangulũ à tota, & insecto priorum segmentorum contentum superatur à quadrato, quod fit ab eodem priori segmento, & ab altero posteriorum segmentorum tanquam ab vna linea, quadrato alterius posterioris segmenti.

Expositio. Sit recta linea A B, quæ secetur primùm vtlibet in signo C, deinde alterum segmentorũ ipsius vtpote A C



Determinatio. secetur per mediũ in signo D. Dico ꝙ rectangulum ab A B, B C comprehẽsum superatur à quadrato ipsius D B, quadrato ipsius D C, vel ipsius D A. Hoc enim patet ex sexta propositione secundi libri Elementorum Euclidis, præsensque propositio parum ab illa differt.

Demonstratio.

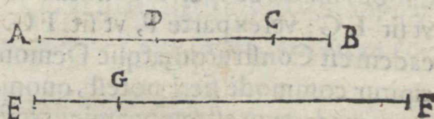
PRO-

PROPOSITIO SEPTIMA.
THEOREMA VII.

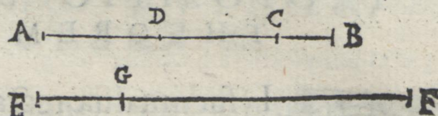


I fuerint duæ rectæ lineæ, quarũ altera quidẽ secta sit vt in præcedenti propositione proponitur, altera verò ita secetur vt totius ipsius secũdæ lineę quadratũ ad quadratum, quod fit ab insecto priorũ primæ lineæ segmentorum, & ab altero secundorum tanquam ab vna linea eam habeat rationem, quam habet quadratum alterius segmẽtorum secundæ lineæ ad rectangulum contentum à tota prima linea, & iam dicto illius priori segmento: habebit etiam eandem rationem excessus quadrati totius secundæ lineę supra iam dictũ quadratũ alterius suorum segmẽtorum ad excessum quadrati ab insecto priorum primę lineæ segmentorum, & ab altero secundorum tanquam ab vna recta linea facti supra rectangulum, quod à tota prima linea, & eodem eius priori segmento comprehenditur. Propositio.

Sit AB quidem recta linea secta vt in præcedẽti propositione proponitur insignis C, D; recta verò EF ita secetur in signo G, vt quadratum totius EF ad quadratum ipsius DB eandem habeat rationem, quam habet quadratum alterius segmentorum lineæ EF, verbi gratia ipsius GF ad rectangulum contentum ab AB, BC: Dico quòd eandem met quoque rationem habebit excessus quadrati lineæ EF supra quadratum ipsius GF ad excessum quadrati lineæ Expositio. Determinatio.



lineæ DB ſupra rectangulum ab AB, BC cõprehenſum. Hæc etiã patet ex decimanona propoſitione quinti lib. Elementorum Euclidis. Verùm quod in Constructione huius Theorematis præcipitur, ſcilicet, vt recta linea EF ita ſecetur in ſigno G, vt quadratum ipſius EF ad quadratum ipſius DB eandem habeat rationem, quam habet quadratum ipſius GF ſegmenti ad rectangulum ab AB, BC contentum: facilè fieri poteſt per quoddam Problema quaſi ſimile primo noſtro Problemati in principio huius operis demonſtrato, quod tale ſit. Dato Parallelogrammo rectangulo, & duobus quadratis: inuenire tertium quadratum, quod habeat eandem rationem ad datum rectangulum, quam habet alterũ datorum quadratorum ad reliquum. Quod quidem Problema eodem modo, eiſdemque Euclidis propoſitionibus conſtruitur, ac demonſtratur quemadmodum illud iam dictum in principio demonſtratũ; vtendo inſuper Corollario quartæ propoſitionis quinti, & nona propoſitione ſexti libri Elementorum Euclidis. Adnotandum autem eſt, quòd iam dicta huius Theorematis Cõſtructio tres Caſus ſortita eſt. Aut enim ſecanda EF recta linea maior eſt quàm AB data recta linea iam ſecta, aut minor, aut ipſi æqualis. & quilibet horum trium Caſuum duo membra poteſt habere. Nã alterum rectæ EF lineæ ſegmentum, cuius quadratum eandem habere debet rationem ad rectangulum ab AB, BC contentum, quam habet quadratum totiùs EF ad quadratum ipſius BD, duobus modis ab ipſa EF linea abſcindi poteſt; vel ex parte E, vt ſit EG; vel ex parte F, vt ſit FG. in quibus omnibus Caſibus eadem eſt Conſtructio, atque Demonſtratio. Hoc autẽ, quod præcipitur commodè fieri poteſt, quoniam tertium ipſum inueniendum quadratum eſt ſemper minus ipſo quadrato dato, à cuius latere ſecando abſciſio iam dicta facienda eſt; vt patet ex ſuppoſitione, & decimaquarta propoſitione quinti libri Elementorum Euclidis, & prima communi ſententia huius.



Demõſtrõ.

Caſus Conſtructionis Theorematis huius.

Notandum.

PROPO-

PROPOSITIO OCTAVA, THEOREMA VIII.

SI recta linea secetur vtcunq;: quadratum totius superat quadratum alterutrius segmentorum, rectangulo bis à segmentis comprehenso vnà cum quadrato reliqui segmenti. Propositio.

Hæc ex quarta propositione secundi libri Elementorum Euclidis omnino manifesta est, ab illaque parum discrepat. Expositio.

PROPOSITIO NONA, THEOREMA IX.

SI Conus à Vertice ad basim plano secetur: communes plani, & superficiei conicæ sectiones vnà cum basis conicæ dimetiente triangulum rectilineum faciunt vocatum triangulum per axem. cuius duo latera supra Coni basim consistentia si rectæ lineæ basi trianguli parallelæ secuerint, omnes illæ rectæ lineæ erunt dimetientes circulorum in superficie conica circunferentias habentium. atque ex eis tum dimetientibus, ~~tum~~ tum circulis basi propinquiores quidem maiores remotioribus sunt. Propositio.

Tres hæc propositio partes habet. Prima, quòd Coni sectio à vertice vsque ad basim, triangulum sit, quod triangulum per axem definiuimus. Secunda, quòd rectæ lineæ basi trianguli parallelæ duo eius latera secantes, sint dimetientes circulorum in superficie conica circunferentias habentium. Tertia, quòd dimetientes, & circuli basi conicæ propinquiores, maiores remotioribus sint. Harum igitur trium partium prima quidem sensui patet, & à plerisq;, Expositio. Demonstratio.

qui de Conicis scripsere tanquam Petitio ponitur: ab Apollonio autem in propositione tertia primi libri Conicorum, & à nonnullis alijs demonstratur. Secunda verò probatur ab eodem Apollonio in quarta propositione primi libri eorundẽ, & ab alijs: à nonnullis autem tanquam Petitio supponitur. Tertia autem pars facilè probari potest. Quòd enim dimetientes basi propinquiores remotioribus maiores sint probatur per secundam partem vicesimænonæ propositionis primi, & quartam propositionem sexti, & nonam Com. Sent. eiusdem primi libri Elemen. Eucl. & nonam Com. Sent. huius: vel per easdem propositiones vicesimamnonam primi, & quartam sexti, & nonam Com. Sent. primi, & per quartamdecimam propositionem quinti libri eorundem. Hoc autem probato, patet etiam circulos basi propinquiores circulis à basi remotioribus esse maiores per tricesimam definitionem huius. Tota igitur hæc propositio perspicua est.

Conclusio.

Propositiones hucusque demonstratæ Quæsito conferentes sunt: sequentes autem Quæsito propriæ erunt.

PROPOSITIO DECIMA, THEOREMA X.

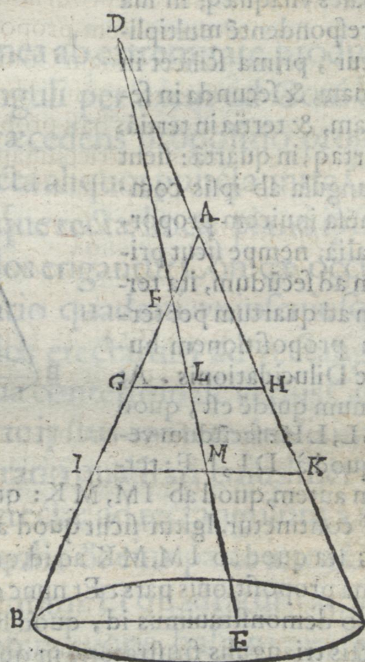
Propositio.



SI iam dicti trianguli per axem in Cono facti latus alterum versus Coni verticem indirectum producatur, & ab eius extremitate extra Conum existente ad conicæ basis dimetientem recta linea ducatur secans reliquum trianguli latus, & omnes rectas lineas basi parallelas: erit ratio rectanguli contenti à partibus cuiuscunque parallelæ ad rectangulum comprehensum à tota partibus ipsis conterminali versus Coni verticem extensa, & parte ipsius conterminalis intra Conum existente, sicut rectanguli comprehensi à partibus cuiuscunque alterius parallelæ ad rectangulum

conten-

contentum à tota similiter ipsis conterminali, & eius parte intra Conum existente. Et rectangula, quæ continentur à partibus parallelarum basi propinquiorum, erunt semper maiora rectangulis, quæ à partibus parallelarum à basi remotiorum continentur.



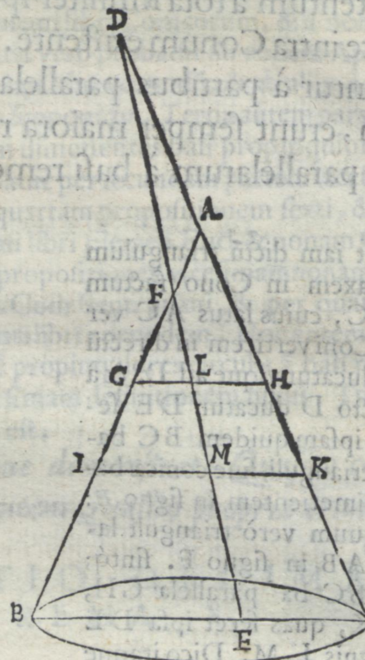
Expositio.

Sit iam dictũ triangulum per axem in Cono factum ABC, cuius latus AC versus Coni verticem in directũ producatur vsque ad D, & à puncto D ducatur DE secans ipsam quidem BC basim trianguli, siue conicæ basis dimetientem in signo *E*: reliquum verò trianguli latus AB in signo F. sintq; ipsi BC basi parallelæ GH, & IK, quas secet ipsa DE in signis L, M. Dico itaque rectangulum à GL, LH contentum ad rectangulũ, quod à DL, LF continetur candem habere rationẽ, quã habet rectãgulũ ab IM, MK ad rectangulum à DM, MF comprehensum: Et quòd rectangulum ab IM, MK contentum maius est rectangulo à GL, LH comprehenso. Quum enim in triangulo quidem BEF ipsæ GL, IM basi BE parallelæ sint, in triangulo verò DEC ipsæ LH, MK basi EC similiter sint parallelæ: erit triangulum FGL simile triangulo FIM, & triangulum DLH triangulo DMK per primam propositionem huius Dilucidationis bis sumptam. Sicut igitur GL ad LF, sic IM ad MF, & quemadmodum HL ad LD, ita KM ad MD per primam de-

Determinatio.

Demonstratio primæ partis.

finitionem sexti libri Elementorũ Euclidis bis sũptam. Quare si quatuor, quæ in F I M triangulo proportionales ostẽsę sũt lineæ in quatuor, quæ in triangulo D M K similiter sunt ostensæ proportionales vnaquæq; in suã correspondentẽ multiplicentur, prima scilicet in primam, & secunda in secũdam, & tertia in tertiã, quartaq; in quartã: fient rectangula ab ipsis comprehẽsa inuicem proportionalia; nempe sicut primum ad secũdum, ita tertium ad quartum per tertiam propositionem huiusce Dilucidationis. At primum quidẽ est, quod à G L, L H: secũdum verò, quod à D L, L F: tertium autem, quod ab I M, M K: quartum denique, quod à D M, M F continetur. Igitur sicut quod à G L, L H ad id, quod à D L, L F; ita quod ab I M, M K ad id, quod à D M, M F. Patet itaque prima propositionis pars. Et nunc quidẽ in proposito nostro præcipuo demonstrauimus id, quod Rabbi Moyses in duobus simul iunctis triangulis frustratoriè in quarta propositione declarauit. Vanum est enim in Geometria bis idem repetere. Secunda verò pars propositionis perspicua est ex tertia communi sententia huius. Partes nanque parallelarum basi propinquiorum partibus remotiorum maiores sunt vnaquæque sua correspondenti, ipsa scilicet I M maior quàm G L, & ipsa M K maior quam L H. Quòd autem hoc verum sit, duobus illis modis probari potest, quibus in præcedenti propositione dimetientes propinquiores basi, maiores esse remotioribus probatum fuit. Vtraque igitur propositionis pars



Conclusio primæ partis.

Secundæ partis demostratio.

Cõclusio secũdæ partis.

pars clara iam eſt. Si ergo iam dicti trianguli per axem in Cono facti latus alterum verſus Coni verticem in directum producatur, & reliqua vt in propoſitione. Quod demonſtrandum erat. Cõcluſio totius propoſitionis.

PROPOSITIO VNDECIMA.

THEOREMA XI.



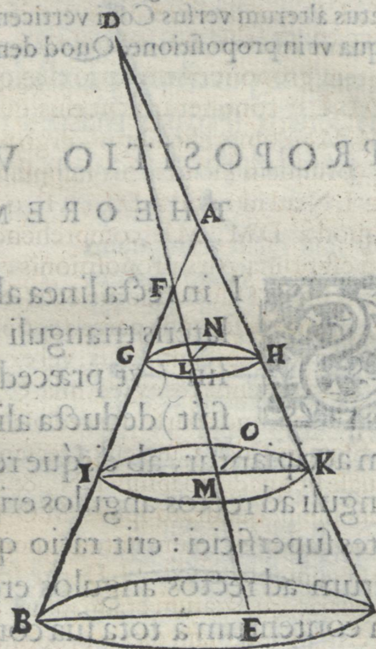
I in recta linea ab extremitate producti lateris trianguli per axem ad Coni baſin (vt præcedens propoſitio propoſuit) deducta aliquot puncta intra Conum accipiantur, ab eiſque rectæ lineæ plano ipſius trianguli ad rectos angulos erigantur Conicæ occurrentes ſuperficiei: erit ratio quadrati vniuſcuiuſque ipſarum ad rectos angulos erectarum ad rectangulum contentum à tota ſua conterminali verſus Coni verticem extenſa, & parte ipſius conterminalis intra Conum exiſtente, ſicut ratio quadrati cuiuslibet alterius ad angulos rectos erectæ ad rectangulum à tota ſimiliter ſua conterminali, & eius parte intra Conum exiſtente comprehenſum. Et quadratum ad angulos rectos erectæ propinquioris baſi maius erit quadrato remotioris ad angulos rectos erectæ lineæ. Vnde ipſa etiam linea ad rectos angulos erecta baſi propinquior remotiore maior erit. Propoſitio.

Sit

Expositio. Sit eadem figura, quæ in præcedenti propositione, & à punctis L, & M intelligãtur duæ rectæ lineæ L N, M O ad rectos angulos erectæ plano trianguli A B C conicæ occurrentes superficiei insignis N, O. Dico quòd ratio quadrati lineæ L N ad rectangulum à D L, L F contentum, est sicut ratio quadrati ipsius M O ad rectãgulum à D M, M F cõprehensum.

Determinatio.

Cõstructio. Intelligãtur duo plana conicæ basi parallela Conum secãtia, quorum cõmunes sectiones cum plano triãguli A B C sint per tertiam propositionem vndecimi libri Elemẽtorum Euclidis rectæ lineæ G L H, & I M K. communes verò eorũdem planorum, & conicæ superficiei sectiones sint per quartam petitionem huius circulorũ circunferentiæ, quæ porrò transibunt per signa N, O, quoniam ipsę L N, M O in eodem sunt plano cum ipsis G H, I K per secundam propositionem eiusdem vndecimi. ipsæ autem G L H, & I M K erunt per eandem quartam petitionem huius dimetientes eorum circulorũ:



Demonstratio primæ partis. Quoniam itaque rectæ lineæ L N, & M O ex suppositione ad rectos sunt angulos plano trianguli A B C: ergo per tertiam definitionem eiusdem vndecimi Elementorũ ipsis etiã G L H, & I M K dimetientibus ad rectos sunt angulos. Quare per quintam propositionẽ pręsentis Dilucidationis quadrata ipsarum L N, M O æqualia sunt rectangulis à G L, L H, & ab I M, M K contentis. igitur per primam partem septimę propositionis quinti libri Elementorum Euclidis ratio quadrati lineæ M O ad rectangulum à D M, M F contentum, est sicut ratio rectanguli ab I M, M K contenti ad idem à D M, M F contentum rectangulũ.

similiter

ſimiliter eadem erit ratio quadrati lineæ LN ad rectangulum à DL, LF comprehenſum, quæ etiã eſt rectanguli à GL, LH comprehenſi ad idem iam dictum rectangulum. eſt autem per præcedentem propoſitionem ratio eius, quod à GL, LH ad id, quod à DL, LF continetur, ſicut eius, quod ab IM, MK ad id, quod à DM, MF comprehenditur. ergo per vndecimam prop. quinti libri eorundem Elemen. bis ſumptam eadem erit ratio quadrati lineæ LN ad id, quod à DL, LF, quæ eſt quadrati lineæ MO ad id, quod à DM, MF comprehenditur rectangulum. Quæ quidem eſt prima pars propoſitionis. Secunda verò pars patet ex quinta huius Dilucidationis, & ex ſecunda parte præcedentis prop. & ex prima, & ſecunda parte ſeptimæ prop. eiuſdem quinti Elem. & ex nona Com. Sent. huius: vel ex eadem quinta prop. & ſecunda parte præcedentis, & ex ſeptima Com. Sent. huius: vel ex eadem quinta, & ſecunda parte præcedentis, & prima parte 14 prop. quin. lib. Elemen. Eucl. Cùm enim rectangulum à GL, LH contentum æquale ſit quadrato ipſius LN, & rectangulum ab IM, MK cõprehenſum, quadrato ipſius MO per iam dictam quintam prop. Dilucidationis; ipſum autem, quod ab IM, MK continetur maius ſit contento à GL, LH per ſecundam partem præcedentis; neceſſariò quadratum etiam ipſius MO quadrato ipſius LN maius erit, propter iam dictas propoſitiones, & Communes Sententias. Quæ eſt ſecunda pars propoſitionis. Ex hac autem ſecunda parte, & ex ſecunda Com. Sent. huius patet etiam tertia propoſitionis pars. Tota igitur hæc propoſitio perſpicua eſt. Si itaque in recta linea ab extremitate producti lateris trianguli, & reliqua, vt in Theoremate. Quod demonſtraſſe oportuit. Adnotandum autem eſt, quòd tertiam huius propoſitionis partem tacuit Rabbi Moyſes tanquam manifeſtam, quoniam autem abſque ea propoſitum præcipuum concludi non poteſt (vt inferiùs conſtabit) idcirco eam nos adiunximus, ac demonſtrauimus. Quanuis autem tota præſens propoſitio eadem ſit cum propoſitione ſecunda trium in principio huius operis poſitarum, nihilominus placuit hic quoque eam ponere, atque demonſtrare ne ordinem Elementarem huius Dilucidationis diſcerperem, & præſertim cùm demonſtratio hæc aliquantulum ab illa diuerſa ſit.

Concluſio primæ partis.

Demonſtratio ſecundæ partis triplex.

Cõcluſio ſecundæ partis.

Demonſtratio tertiæ partis.

Concluſio eiuſdem.

Concluſio vniuerſalis.

Notandum.

PROPO-

PROPOSITIO DVODECIMA.

THEOREMA XII.

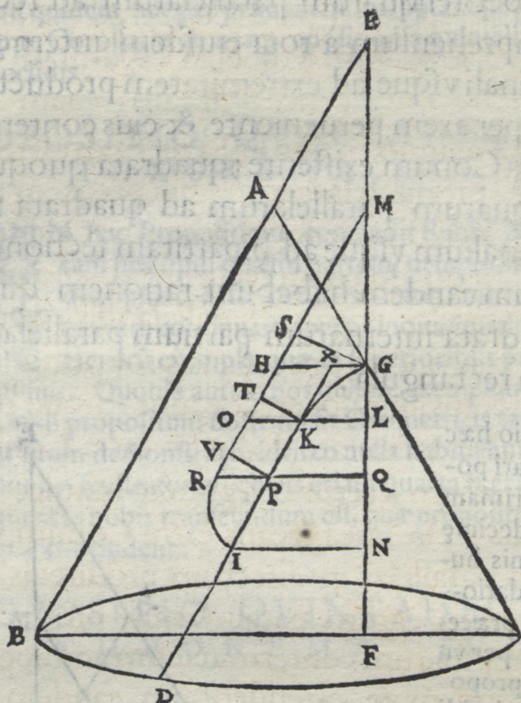
Propositio.



SI à ſigno, in quo linea recta ab extremitate producti lateris triãguli per axem ad Coni baſim deducta reliquum trianguli latus ſecat, quædam recta linea plano trianguli ad rectos angulos erigatur parallela illis, quæ intra Conum (vt proponit præcedens propoſitio) eidem plano ad rectos angulos erectæ ſunt; atque pars ipſius lineæ ab extremitate deductæ extra Conum iacens per medium ſecetur, & à puncto huiuſce ſectionis ducatur recta linea ſecans extra Conum omnes iam dictas parallelas in directum productas: quadrata totarum earum parallelarum productarum ad quadrata ſuarum conterminalium ad bipertitam vſque ſectionem ſe extendentium eandem rationem habebunt.

Præſens propoſitio nulla prorſus indiget declaratione; quoniã poſita hìc primæ noſtræ demõſtrationis ſecunda figura, facilè poteſt ex prima, & ſecunda huius Dilucidationis propoſitionibus demonſtrari. Cùm enim per iam dictã primã Dilucidationis propoſitionẽ ſit vt GH ad GM, ſic LO ad LM; & QR ad QM, & ſi quæ eſſent aliæ parallelæ: manifeſtum eſt per ſecundam eiuſdem Dilucidationis quòd ſicut etiam quadratum ipſius GH ad quadratum ipſius GM, ita quadratum ipſius LO ad quadratum ipſius LM, & quadratum ipſius QR ad ipſius QM quadratũ. Reponatur igitur hìc figura illa, quæ etiam ſequentibus propoſitionibus deſeruiet, & omnia clara erunt.

Demonſtratio.



PROPOSITIO TERTIADECIMA.

THEOREMA XIII.



CVNCTIS ita se habentibus vt in pręcedenti propositione, si quadratum parallelæ, quæ tota extra Conum est, ad suæ conterminæ vsque ad bipartitam sectionem peruenientis quadratum eandem habuerit rationem, quam habet quadratum factum ab interna par- Propositio.

te cuiuslibet reliquarum parallelarum ad rectangulum comprehensum à tota eiusdem internę partis conterminali vsque ad extremitatem producti lateris trianguli per axem perueniente, & eius conterminalis parte intra Conum existente : quadrata quoque totarum reliquarum parallelarum ad quadrata suarum conterminalium vsque ad bipartitam sectionem peruenientium eandem habebunt rationem, quam habent quadrata internarum partium parallelarum ad iam dicta rectangula.

Demonstratio.

Propositio hæc facilè probari potest per primam partem vndecimę propositionis huius Dilucidationis, & per præcedentem, & per vndecimam propositionem quinti libri Elemen. Euclidis toties sumptã, quoties oportuerit; si hìc quoque præcedentis propositionis figura repetatur. Notandum autem quòd in hac propositione supponitur quod fiat quadratum lineæ GH ad quadratũ lineæ GM, sicut quadratum lineæ LK ad rectangulum ab EL, LG contentum,

Notandum.

tum, quod quidem fiet per primam huius operis propositionem coadiuuante Corollario quartæ propositionis quinti libri Elementorum Euclidis.

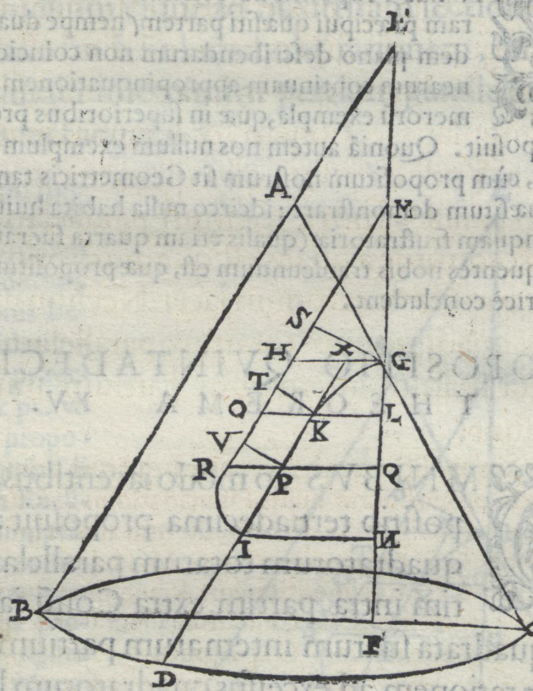
PROPOSITIO QVARTADECIMA, THEOREMA XIIII.

IN hac Propositione concludit Rabbi Moyses alteram præcipui quæsiti partem (nempe duarum in eodem plano describendarum non coincidentium linearum continuam appropinquationem) iuxta numerorũ exempla, quæ in superioribus propositionibus ipse posuit. Quoniã autem nos nullum exemplum in numeris dedimus, cùm propositum nostrum sit Geometricis tantùm rationibus Quæsitum demonstrare: idcirco nulla habita huius propositionis tanquam frustratoriæ (qualis etiam quarta fuerat) expositione, ad sequentes nobis transeundum est, quæ propositum nostrum Geometricè concludent.

PROPOSITIO QVINTADECIMA, THEOREMA XV.

OMNIBVS eo modo iacentibus, quo propositio tertiadecima proposuit: excessus quadratorum totarum parallelarum partim intra partim extra Conũ iacentium supra quadrata suarum internarum partium eam habebunt rationem ad excessus quadratorum linearum ipsis parallelis conterminalium vsque ad bipartitam illam sectionem supra rectangula contenta a totis conterminalibus vsque ad extremitatem Producti triangularis lateris peruenientibus, & partibus earundem conterminalium internis, quam habent qua- Propositio.

drata totarum ipſarum parallelarum ad quadrata ipſarum conterminalium vſque ad bipartitam ſectionem ſe extendentium: nec non eam, quam habent quadrata internarum partium parallelarum ad iam ſæpe dicta rectangula.



Duas hæc etiam propoſitio partes habet, quarum prima quidē patet ex tertiadecima, & ſeptima propoſitione huius Dilucidationis: ſecunda verò probatur per primam partem huius propoſitionis, & per tertiamdecimam huius Dilucidationis, & per vndecimam propoſitionem quinti libri Elementorum Euclidis, vt in proxima figura declarari poteſt.

Demonſtratio.

PROPO-

PROPOSITIO SEXTADECIMA.

THEOREMA XVI.

MANENTIBVS cunctis vt in præcedenti propositione: necessariò excessus, quo iam dicta rectangula à conterminalium vsque ad bipartitam sectionem se extendentium quadratis superantur, nil aliud est nisi quadratum rectæ lineæ, quæ in ipsa cõterminali inter lateris triangularis sectionem, & bipartitam diuisionē recipitur. Vndè excessus, quo quadrata internarum partium parallelarum à totarum parallelarum quadratis exceduntur æqualis est quadratò primæ parallelæ, quæ tota extra Conum iacet. Necnon isti omnes excessus quadratorum totarum parallelarum supra quadrata suarum internarum partium inuicem æquales sunt.

Præsens propositio tres habet partes, quarum prima quidē patet ex sexta propositione huius Dilucidationis. Cùm enim ipsa E L vtcunque in signo G secta sit, alterum autem ipsius segmentum, nempe G E per mediū in signo M sit diuisum, proculdubio per ipsam sextam propositionem rectangulum à tota E L, & insecto eius segmento L G contentum superatur à quadrato ipsius M L ex eodem priori G L segmento, & altero secundorum segmentorum nempe G M constantis, quadrato eiusdem G M lineæ. idemque in cæteris etiam ostendetur. Secunda autem probatur per primam partem præsentis, & præcedentis, & per duodecimam huius Dilucidationis, & per vndecimā propositionē quinti libri Elementorum Euclidis, & primam partem nonæ propositionis eiusdem quinti: Vel per secundam partem præcedentis, & suppositionem tertiædecimæ propositionis huius Dilucidationis, & eandem vndecimam quinti, & primam partem nonæ propositionis

Demonstratio primæ partis.

Demonstratio secundæ partis duplex.

nis eiusdē.

Prima Demonstratio secundæ partis.

Cùm enim excess⁹ quadrati L O supra quadratū L K ad excessū quadrati L M supra rectangulum contentum ab EL, LG, idest p primam partē præsentis propositionis ad quadratū G M habeat rationē sicut quadratum L O ad quadratū L M per primā partē præcedentis: quadratum autem L O ad quadratum L M eam habeat rationem, quam quadratum G H ad quadratum G M per duodecimā propositionem huius Dilucidationis: ergo per vndecimam propositionem eiusdem quinti Elementorum excessus quadrati L O supra quadratum L K eam habebit rationē ad excessum quadrati L M supra rectangulum contentum ab E L, L G, idest ad quadratum G M, quam habet etiam quadratum G H ad idem G M quadratum. igitur per primam partem nonæ propositionis eiusdē quinti Elemētorum excessus quadrati L O supra quadratum K L æqualis est quadrato lineæ G H. Idem quoque de excessibus quadratorum cæterarum parallelarum totarum supra quadrata suarū internarum partium ostēdetur. Præterea quoniam per secundam

Secunda Demonstratio secundæ partis.

partem

partem præcedentis propositionis excessus quadrati *L* O supra quadratum K*L* ad excessum quadrati L *M* supra rectangulum comprehensum ab E*L*, *L*G, idest ad quadratum GM eandem habeat rationem, quam habet quadratum *KL* ad iam dictum rectangulum: quadratum autem *LK* ad iam dictum rectangulum eam habet rationem (per suppositionem tertiædecimę propositionis huiusce Dilucidationis) quam habet quadratum GH ad idem GM quadratū: erit per eandem vndecimā, & primā partem nonæ prop. quinti lib. Elem. Eucl. excessus quadrati LO, quo superat quadratum LK, æqualis quadrato GH. Idem autem hoc quoque secundo modo de cæteris etiam quadratorum parallelarum totarū supra quadrata suarum internarum partium excessibus demonstrabitur. Patet igitur vtroque modo secunda propositionis pars. Tertia verò ex secunda iam demonstrata, & ex prima communi sententia primi libri Elementorum Euclidis manifesta est. Tota igitur hæc propositio perspicua relinquitur. Manentibus igitur cunctis, & reliqua vt supra. Quod demonstrandum erat. Tertiæ partis Demonstratio. Conclusio vniuersalis.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA. THEOREMA XVII.

Continens alteram partem demonstrationis duodecimæ.



CVNCTIS similiter vt in præcedenti iacentibus, excessus quadratorum totarum parallelarum supra quadrata suarū internarum partium nil aliud est nisi duplum rectanguli ab interna, & externa parallelarum parte contenti, vnà cum quadrato externæ partis earundē. Vndè quadrata externarū partium basi Conicæ propinquiorum quadratis externarum partium à basi remotiorum minora sunt. Nec non ipsæ externæ parallelarū partes basi propinquiores externis partibus à basi remotioribus sunt minores. Propositio.

Tres

Primæ partis demonstratio.

Tres hæc quoque partes habet, quarum prima quidem ex octaua huius Dilucidationis omnino clara est. Secunda verò facilè demonstrari potest per secũdam partem tertiæ propositionis illarum trium, quas in operis initio demonstrauimus, peracta scilicet Constructione Intelligatur enim duplum rectanguli ab LK, KO Contenti, quod est per primam propositionem secundi libri Elementorum Euclidis rectangulum à KO, & dupla ipsius KL contentũ, quadrato ipsius KO sic esse adiunctum vt proponit illa iam dicta tertia propositio: necnon duplum rectanguli à QP, PR contenti, idest rectangulum à PR, & dupla ipsius PQ contentum, eodem modo quadrato ipsius PR adiectum esse. Cùm itaque duo hæc aggregata rectangula per primam partem huius propositionis sint excessus quadratorum LO, & QR supra quadrata KL, & PQ, quippe qui excessus per tertiam partem præcedentis propositionis inuicem æquales esse demonstrati sunt: cumque linea PQ maior sit quàm KL per tertiã partem vndecimæ propositionis huius Dilucidationis, ideoque dupla etiam lineæ PQ maior sit quàm dupla lineę KL per quintamdecimam propositionem quinti libri Elementorum Euclidis: igitur per secundam partem, illius iam cõmemoratæ tertiæ propositionis quadratum lineæ KO maius est quadrato lineæ PR. idemque de cæteris etiam externarum partium quadratis demonstrari potest. Patet itaque secunda etiam propositionis pars. cuius vtique demonstrationem obscurè admodum, & caliginosè Rabbi Moyses declarat, quoniam tertiam illam propositionẽ à nobis in superioribus demonstratã ipse sicco pede præterijt, ex qua nimirùm tota huius secundæ partis demonstratio dependet. Ex hac autem secunda propositionis parte iam demonstrata, & ex secunda communi sentẽtia huius tertia quoque propositionis pars explorata relinquitur. Quare tota propositio candore lucescit. Cunctis igitur, &c. vt supra. Quod erat demonstrandum. Verum enimuero cùm ex tertia parte huius propositionis pateat externas parallelarum partes conicæ basi propinquiores externis earundem partibus à basi remotioribus esse minores, idemque de cunctis externis eiusmodi partibus in infinitum ostendi possit: habemus iam alterum præcipui nostri Quæsiti membrum veluti demonstratum, quòd scilicet duæ lineæ in eodem plano iacentes quantò longiùs producuntur, eò magis sibi inuicem propiores fiant. Nã recta MR linea, quæ à bipartita illa sectiobe extra Coni superficiem protracta fuit

Secundæ partis Constructio.

Demonstratio secundæ partis.

Cõclusio secũdæ partis.

Rabbi Moysis defectus primus.

Tertiæ partis demonstratio.

Conclusio vniuersalis.

Demonstratio alterius partis Quæsiti principalis.

fuit secans omnes illas parallelas extra Conum productas, in eodemque plano cū dicta recta linea iacentes: necnō inflexa GKPID linea latus Hyperboles factæ (vt ex superioribus cōstructionibus, & vicesimaprima definitione huius manifestum est) ab eodem plano Conum secante, eò magis sibi appropinquant, quātò lōgiùs versus Coni basim in eodem iam dicto plano producuntur. Quod quidē sic breuiter concludatur. Quoniam KO maior est quàm PR, vt fuit ostensum, igitur & KT minima distātia puncti K à recta MR maior est quàm PV minima distātia puncti P ab eadem MR recta linea. hæc enim in nostra prima demonstratione satis superque demonstrata fuere. Idem autem de omnibus etiam alijs inflexæ GKPID lineæ à recta MR minimis distantijs ostendetur. Alterum igitur Quæsiti præcipui membrum clarum est. In quo sanè demonstrando Rabbi Moyses paralogismum illum committit, quem etiam omnes, quos legimus huiusce rei Autores præter Cardanum cōmiserunt: quādoquidem ex ipsarum KO, & PR, cæterarumq; similium inæqualitate, duarum linearum, inflexæ scilicet GKPID, & rectæ MR continuam versus Coni basim appropinquationem concludit. Demonstrato igitur altero præcipui Quæsiti membro, ad reliquum nobis pergendum est, quod in sequenti propositione demonstrabitur.

Cōclusio alterius partis Quæsiti præcipui.

Rabbi Moysis defectus secundus.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

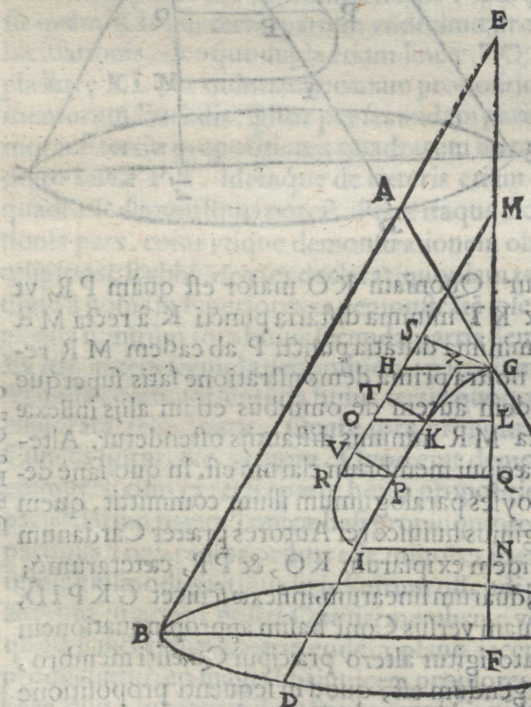
THEOREMA XVIII.

Continens reliquam partem demonstrationis duodecimæ.

Propositio.



MNIBVS eodem modo vt in præcedenti dispositis, illæ iam dictæ duæ lineæ, Hyperbolica scilicet, & recta in eodem ambæ plano existentes, & quò magis producuntur, eò magis sibi inuicem proximātes, vt in præcedenti demonstratum est: si etiam in infinitum protrahantur, nunquam coincident.



Sit hìc quoque figura superiorum propositionum posita. Dico itaque duas lineas inflexam scilicet GKPID, & rectam MR in eodem plano iacentes, & quantò magis versus Coni basin producuntur, eò magis sibinuicem proximantes: si etiam in infinitũ protrahãntur, nunquam sese contingere. Nam si fieri potest tangant se in aliquo signo exempli gratia in signo *I*, à quo ad GF rectam lineam ducatur (vt in prima nostra demonstratione docuimus) *I*N recta linea perpendicularis in planum trianguli ABC, & parallela ipsis GH, & K*L*, & PQ rectis lineis. Erit igitur per primam partem vndecimę huius Dilucidationis ratio quadrati lineæ *I*N ad rectangulum ab EN, NG comprehensum, sicut ratio quadrati lineæ K*L* ad rectaugulum ab E*L*, *L*G contentum. Sed ratio quadrati lineæ *K*L ad rectangulum ab EL, LG cõtentum per tertiãdecimam huiusce Dilucidationis est sicut ratio quadrati lineæ LO ad quadratum lineæ LM, ergo per vndecimam propositionem quinti libri Elementorum Euclidis vt quadratum ipsius IN ad rectangulum ab EN, NG contentum, sic quadratum ipsius LO ad quadratum ipsius LM. quadratum autẽ ipsius LO ad ipsius *L*M quadratum eandem habet rationem, quam ipsius *I*N quadratum ad quadratum ipsius MN per duodecimam huius Dilucidationis: igitur per eandem vndecimam quinti vt quadratum IN ad rectangulum ab EN, NG, sic etiam idem *I*N quadratum ad quadratũ ipsius MN. quare per secundam partem nonæ propositionis eiusdem quinti Elementorum quadratũ lineæ MN æquale est rectangulo ab EN, NG contento, quod est absurdum: quoniam reuera quadratum ipsius MN superat rectãgulum ab EN, N*G* contentum quadrato lineæ *G*M, vt in sextãdecima Dilucidationis huius demonstratum fuit. Non tangit igitur recta linea MR inflexam *G*KPID in signo *I*. Similiter autem ostendetur quòd neque etiã in alio puncto dictæ lineæ sese tangere possunt. Nullibi ergo se contingent si etiam in infinitum producantur. Omnibus itaque eodem modo, &c. vt in propositione. Quod demonstrasse oportuit. Verùm hoc etiam demonstrato, vniuersum iam pręcipuum nostrum Quæsitum luce clarius est. Hactenus igitur totam Rabbi Moysis demonstrationem iam dilucidauimus, ad perfectionemque *G*eometricam quoad fieri potuit redegimus, quæ quidem erit duodecima præcipui nostri Problematis demonstratio.

Expositio. Determinatio.

Constructio, & Demõstratio reliquæ partis Quæsiti præcipuis

Conclusio eiusdem reliquæ partis. Conclusio vniuersalis.

DILVCIDATIO VLTIMAE PARTIS LIBELLI RABBI MOYSIS,

Quę continet aliam ſensu magis perceptibilem pręcipui Problematis Demonſtrationem, quæ erit Propoſiti noſtri xiij, & vltima.

POST ipſam autem iam dilucidatam demonſtrationem volens ipſe Rabbi Moyſes oſtendere quodam etiam ſenſu magis perceptibili exemplo quòd cauſà huiuſce admirandi effectus in præfatis lineis ſupra Conum deſcriptis non aliunde prouenit niſi ab ipſa tumoſa, montoſaq; Coni rotunditate: reducit per imaginationem Conum in plano, in quo reperit quaſdam à conica ſuperficie diſtantias, quæ quantò magis Conus creſcit baſim verſus, tantò minores fiunt; & nunquam tamen adeo decreſcunt, quòd nullæ prorſus euadant. quo quidem in plana ſuperficie oſtenſo, reducit iterum per excogitationem Conum ipſum cum omnibus deſignatis lineis, vt iacebat in plano, ad corpus conicum, in cuius conica ſuperficie oſtendit eaſdem iam dictas permanere diſtantias continuè verſus Coni baſim decreſcentes, & nunquam euaneſcentes. Poſtea docet per extremitates dictarum diſtantiarum Cono infixas curuam, ſeu Hyperbolicam lineam in quodam plano deſignare, & per alteras earundem diſtantiarum extremitates extra Conum iacentes rectam ducere lineam in eodem plano cum ipſa Hyperbolica iacentem, quippequæ tantò eidem Hyper-

Hyperbolicæ propior fiet, quantò longiùs ambæ eodem in plano versus Coni basim vnà cum toto ipso Cono producentur: nunquam tamen ipsam tanget, etiam si in infinitum protrahantur. Verumtamen quoniam exemplum hoc ipsius Rabbi admodum obscurè, perplexè, conciseq; ab ipso declaratur; & præsertim quia Lemma quoddam Geometrica nimirùm demonstratione indigens sicco pede præterire videtur, in quo tota huius exempli vis consistit: idcirco hæc vltima pars à nobis leuiter prætereunda non est, sed maximè illustranda, atque dilucidanda. Pulcrum siquidem exemplum hoc est, & sensu perceptibilem rei veritatem Geometricis rationibus confirmatam ob oculos per quandam imaginationem expeditißimè ponit. Agè igitur illud Lemma priùs demonstremus, qnod ipse Rabbi indemonstratum reliquit. Sit autem Theorema huiuscemodi.

Lemma sequentis Demonstrationis.

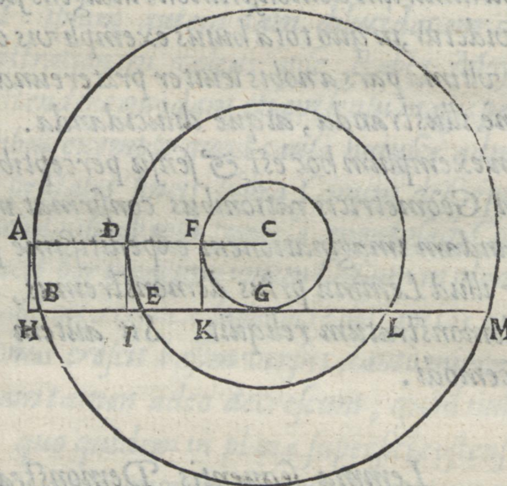
Theorema.

SI quotlibet circuli concentrici in eodem plano designati fuerint, in eisque duæ rectæ lineæ parallellæ ducantur altera quidem tangens vltimum interiorem circulum, & secans reliquorum circulorum circunferentias, altera verò à communi centro exiens, secansque omnes circulorum circunferentias; & à punctis, vbi linea Propositio.

à cen-

à centro exiens circunferentias secat, ad reliquam parallelam perpendiculares rectę ducantur lineæ: erunt ipsius rectæ lineæ interiorem vltimum circulum tangentis partes inter ipsas perpendiculares, & circulorum circunferentias receptæ, quò magis à iam dicto contactu remotæ, eò quidem minores.

Expositio. Sit circulus AB, cuius centrum C, & intra ipsũ alius DE circulus habens idem centrũ, & intra hunc tertius circulus FG prioribus concentricus, & à dato pũcto G (quodcunque sit) ducatur per decimamsepti mam propositionẽ tertij libri Elementorum Euclidis recta linea tangens datum circulum FG in ipso signo G, & secans circunferentiam quidem DE in signo E, circunferentiam verò AB in signo B, quæ per secundam petitionem primi libri eorundem producatur vltra signum B interminatè. & per punctum C ducatur per tricesimamprimam propositionem eiusdem primi libri Elemẽtorum parallela ipsi BG, quæ sit CFDA. & à signis ADF erigantur per vndecimam propositionem eiusdem primi ad rectos angulos ipsi AC ipsæ AH, DI, FK rectæ lineæ, quæ productæ secent ipsam GB ex parte B interminatam in signis HIK: Secabunt enim eam necessariò cùm secent ipsi parallelam AC ratione sæpe superiùs dicta. erunt itaq; ipsæ AH, DI, FK perpendiculares super ipsam GH per tertiam partem vicesimænonæ propositionis, & decimam definitionem primi libri Elementorum Euclidis; cadentque per sextamdecimam proposi-

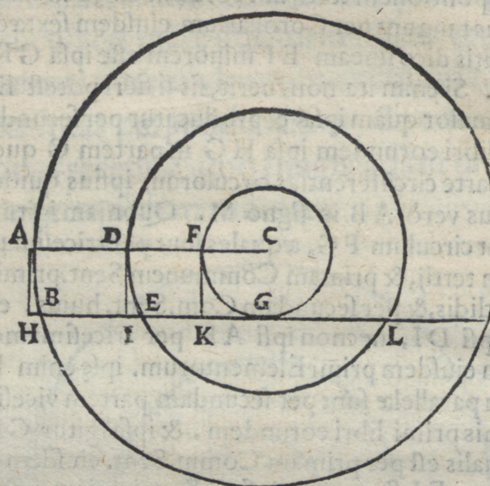


propositionem tertij lib. eorundẽ extra circulorũ circunferentias, quas tangunt per Corollarium eiusdem sextædecimæ. His ita expositis dico lineam E I minorem esse ipsa G K, & ipsam B H ipsa E I. Si enim ita non fuerit, sit si fieri potest E I æqualis ipsi G K, vel maior quàm ipsa; & producatur per secundam petitionem primi libri eorundem ipsa H G in partem G quousque secet ex altera parte circũferentias circulorum ipsius quidem D E in signo L, ipsius verò A B in signo M. Quoniam igitur F K, & K G tangunt circulum F G, æquales sunt per tricesimamsextam propositionem tertij, & primam Communem Sent. primi libri Elementorum Euclidis, & per secundam Com. Sent. huius. est autem F K æqualis ipsi D I, necnon ipsi A H per tricesimamquartam propositionem eiusdem primi Elementorum. ipsę enim F K, D I, A H inuicem parallelæ sunt per secundam partem vicesimæoctauæ propositionis primi libri eorundem. & ipsa igitur G K ipsis D I, & A H æqualis est per primam Comm. Sent. eiusdem primi bis sumptam. si ergo E I sit æqualis ipsi G K, erit etiam æqualis ipsi D I per eandem primam Com. Sent. est autem rectangulum ab L *I*, *I* E contentum æquale quadrato ipsius D *I* per iam dictam tricesimamsextam tertij. igitur per eandem secundam Comm. Sent. huius, & per primam Com. Sent. eiusdem primi Elemen. quod ab L *I*, *I* E continetur æquale est quadrato ipsius E *I*, totum scilicet suæ parti per tertiam propositionem secundi libri Elementorum Euclidis, quod fieri non potest per nonam Com. Sent. primi libri eorundem. Non est igitur E *I* æqualis ipsi G K. Sit modò maior quàm ipsa, erit etiam maior quàm D *I* per secundam partem septimæ propositionis quinti libri Elementorum Euclidis, & nonam Com. Sent. huius. quare per secundam Comm. Sent. huius quadratum lineæ *E I* maius erit quadrato lineæ D *I*. Cùm autem rectangulum ab L *I*, *I E* contentum æquale sit quadrato ipsius D *I*, erit per primam partem eiusdem septimæ quinti, & nonam Com. Sent. huius dictum rectangulum minus quadrato ipsius *E I*, totum videlicet sua parte per eandem tertiam secundi, quod vtique absurdum priore peius est. Non est ergo *E I* maior quàm ipsa G K: ostensum autem fuit quòd neque etiam ipsi æqualis: necessariò igitur minor quàm ipsa est. Præterea si B H minor non est quàm *E I*, sit primò ipsi æqualis. Quoniam itaque rectangulum quidem, quod ab L *I*, *I E* æquale est quadrato ipsius D *I* per tricesimamsextam

Determinatio.

Cõstructio.

Demonstratio indirecta.



propositionem libri tertij Elemen. Euclidis, quod verò ab MH, HB similiter quadrato AH per eandem, quadratum autē AH quadrato DI per tricesimãquartam propositionē primi libri Elemē. Eucl. & secundam Comm. Sent. huius est æquale: igitur per primam Com. Sent. eiusdē primi Elementorum bis sumptam rectangulum ab *LI*, *IE* contentum æquale erit contento ab MH, HB rectangulo. sed contentum ab LI, IE cōtento ab *LI*, BH est æquale per suppositionem, & tertiam Com. Sent. huius: ergo & contentum ab MH, HB æquale erit contento ab *LI*, BH per primam Communem Sent. eiusdem primi Elementorum, quod vtique est maximum inconueniens, quoniam reuera contentum ab *LI*, BH minus est contento ab MH, HB per primam propositionem sexti libri eorundem Elem. accepta enim BH pro communi altitudine, quemadmodum basis MH basi LI per nonam Comm. Sent. primi eorundem maior est, ita etiam contentum ab MH, HB contento ab *LI*, BH maius erit per nonam Com. Sent. huius. Non est igitur BH ipsi EI æqualis. Sit modò maior quàm ipsa. erit itaque rectangulum ab MH, HB comprehensum maius rectangulo ab LI, IE comprehenso per tertiam Comm. Sent. huius. hoc autem fieri non potest, quoniam paulò antè duo iam dicta rectangula æqualia inuicem esse ostensa sunt. Non est ergo BH maior quàm *EI*: at ostensum est quòd neque etiam æqualis ipsi esse potest: de necessitate igitur minor quàm ipsa erit. Quare demonstratum est ipsam BH ipsa *EI*, ipsamque *EI* ipsa GK minorem esse. Idem autem eodem modo de cæteris quoque huiuscemodi rectis lineis, si etiam infiniti essent con-

centrici

centrici descripti circuli, ostendi potest. Patet ergo propositum indirectè. Possumus autem & directè breuiter idem sic demonstrare. Quoniam quadratũ ipsius GK quadrato ipsius FK per tricesimamsextam prop.tertij,& primam Com.Sent.primi libri Elementorum Euclidis æquale est; atque idcirco quadrato etiam ipsius DI per secundam Comm. Sent. huius, & eandem primam Com.Sent. primi. Est autem quod etiam ab LI,IE continetur rectangulum per eandem tricesimamsextam tertij æquale eidem ipsius DI quadrato: igitur per eandem primam Comm.Sent.rectangulum ab LI, IE contentum quadrato ipsius GK erit æquale. Sed quadratum ipsius EI minus est per tertiam propositionem secundi libri Elementorũ Euclidis rectangulo ab LI, IE contento: ergo per secundam partem septimæ propositionis quinti libri eorundem, & nonam Communem Sententiam huius quadratum ipsius EI minus est quadrato ipsius GK. quare per secundam Communem Sententiam huius linea EI quàm linea GK minor erit. Rursus contentum ab LI, IE rectangulum æquale est ei, quod ab MH, HB continetur rectangulo (vt superiùs ostensum est) & per tertiam propositionem secundi libri Elementorum Euclidis, quod quidem ab LI, IE continetur æquale est contento ab LE, EI, simulque ipsius EI quadrato: quod verò ab MH, HB ei, quod ab MB, BH, vnà cùm quadrato ipsius BH. habemus ergo duo rectangula alterum ab LE, EI, & alterum ab MB, BH contenta, quæ duobus quadratis, linearum scilicet EI, & BH ita adiungi possunt, vt vnum quidem cum ipsis commune latus habeant, duo verò duobus indirectum iacentia: atque duo hæc aggregata inuicem æqualia sunt, vnum autem vnius rectanguli latus ex indirectum iacentibus, ipsum nempe EL minus est per nonam Communem Sententiam primi libri Elementorum Euclidis vno ex eisdem alterius rectanguli lateribus, vtpotè ipso BM: igitur per secundam partem tertiæ propositionis in principio huius libri demonstratæ quadratum lineæ BH quadrato ipsius EI minus est. vnde per secundam Communem Sententiam huius linea quoque BH quàm ipsa EI minor erit. Similiter autem de quibuscunque etiam alijs huiuscemodi lineis idem ostendetur. Perspicuum igitur est propositum etiam directè. Si itaque quotlibet circuli concentrici in eodem plano designati fuerint, & reliqua vt superiùs. Quod demonstrandum erat.

Cõclusio indirectæ demonstrationis.

Demonstratio directa.

Cõclusio directæ demõstrationis.

Conclusio totius.

Hoc itaque Theorema proposito nostro maximè necessarium ipse Rabbi prætermisit. Cùm enim dixisset distantiam EI minorem esse distantia GK, similiterque ipsam BH ipsa *EI*, & sic de cæteris eiusmodi: hoc porrò nulla alia ratione probauit, nisi quia (inquit ipse) maiores circuli minorem habent incuruationem. quæ quidem ratio peiùs concludit quàm illa Orontij ratio ab incuruatione circulorum ipsa quoque suscepta, quam in superioribus tanquam nil concludentem redarguimus.

Rabbi Moysis defectus tertius.

DECIMATERTIA, ET VLTIMA PRAECIPVI PROBLEMATIS DEMONSTRATIO.

Expositio.



VM à nobis proximum Lemma Geometricè iam demonstratum sit, proposito nostro nunc illud applicantes dicimus. Quòd si Conum aliquem imaginemur esse supra basim suam compressum, totumque in plano iacentem: tunc quidem omnes circuli, qui in eius conica superficie basi paralleli erant, in vno, eodemque plano iacebunt idem commune centrum circunstantes, quod vtique priùs Coni fastigium erat: latus verò Coni erit recta linea à centro communi concentricorum circulorum exiens, omnesque circulorum ipsorum circunferentias ex altera parte secans, quemadmodum linea CA in superiori figura, quæ etiam hìc tota repetenda est præter lineam GLM, vt cuius hoc loco nullus sit vsus futurus.

Cõstructio.

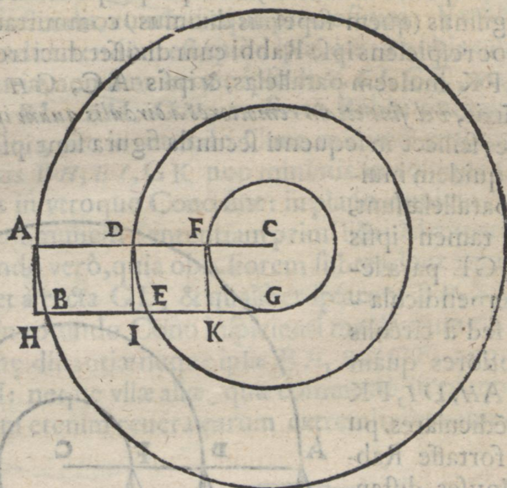
Si igitur Conum hunc ita compressum, totumque in vno plano prostratum, ad suam pristinam montosam, tumosamque rotunditatem restitutum esse intellexerimus; & eius latus, nempe ipsam AC à basi vsque ad verticem iam ascendisse: proculdubio statim inueniemus etiam rectæ quidem AC parallelam, ipsam scilicet GH simul cum perpendicularibus AH, DI, F*K* circulos tangentibus eleuatam in aërem extra Conum, & remotam à punctis B,E,G. conicæ superficiei iuxta distantias B*H*, EI, GK quanuis non minimas.

Demonstratio.

Quæ profectò distantiæ quemadmodum priùs in Cono supra basim suam toto compresso continuè versus ipsam basim, scilicet vltimum exteriorem AB circulum imminuebantur (vt demonstratũ fuit in proximo Lemmate) nec tamẽ vnquam puncta H,I,K,

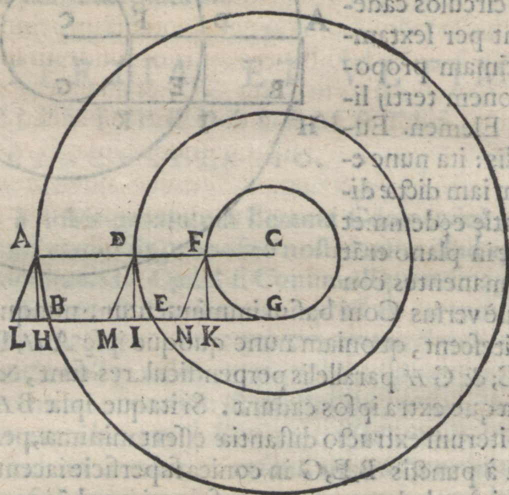
vel

vel alia eis ſimilia circulorũ circunferentias tangere poterãt, quoniam lineæ A*H*, D*I*, FK, & omnes eis ſimiles ſemper extra circulos cadebant per ſextamdecimam propoſitionem tertij libri Elemen. Euclidis: ita nunc etiam iam dictæ diſtantię eędemmet quæ in plano erãt permanentes con



tinuè verſus Coni baſim imminuentur, nunquam tamen prorſus deliteſcent, quoniam nunc quoque ipſę A*H*, D*I*, FK lineæ ipſis AC; & G*H* parallelis perpendiculares ſunt, & circulos tangunt, totæque extra ipſos cadunt. Si itaque ipſæ B*H*, *EI*, GK in Cono iterum extructo diſtantiæ eſſent minimæ, per quas recta G*H* linea à punctis B, E, G in conica ſuperficie iacentibus diſtare poſſit: nimirùm haberemus propoſitum iuxta hãc quoque imaginariam, ſenſu perceptibilem, exemplaremq; demonſtrationem. nam imaginaremur planũ quoddam ab ipſa G*H* linea Conum verſus exurgere, ipſamque ſuperficiem conicam penetrare, quod vtique planum cùm per Coni verticem non tranſeat, neque baſi conicæ parallelum ſit; deſignaret nimirùm per quintam petitionem huius in conica ſuperficie ſub recta G*H* linea quandam inflexam lineam, ſcilicet communem dicti ſecantis plani, & conicæ ſuperficiei ſectionem per ſigna B, E, G tranſientem, quæ in eodem eſſet plano cum ipſa G*H*, propiorque ei fieret in ſigno E quàm in ſigno G, & in ſigno B quàm in E ſigno, & ſic in cæteris vſque in infinitum, ſi vnà cum toto Cono produci intelligantur. At quoniam ipſæ porrò diſtantiæ B*H*, *EI*, GK non ſunt minimæ, quibus G*H* recta linea ab ipſis B, E, G ſignis diſtare poſſit, vt in ſuperioribus à nobis ſatis ſuperque demonſtratum fuit; idcirco hìc quoq; opus eſt mi-

nimas reperire distantias, in eisque propositum concludere ne paralogismus (quem superiùs diximus) committatur. fortasse enim ad hoc respiciens ipse Rabbi cùm dixisset duci tres illas lineas A *H*, D *I*, F K inuicem parallelas, & ipsis A C, G *H* perpendiculares: subiũxit, *vel sint etiam remotiores à circulis quàm ipsæ perpendicuares.* quales scilicet in sequenti secunda figura sunt ipsæ A L, D M, F N. quæ quidem inuicem parallelæ sunt, non tamen ipsis A C, G L parallelis perpendiculares: sed à circulis remotiores quàm ipsæ A *H*, D *I*, F K perpẽdiculares. putans fortasse Rabbi Moyses distantias BL, EM, GN esse in Cono rotundo minimas illas distantias, quas quęrimus: vel has quidem esse maiores (vt etiam in plano sunt) ipsis



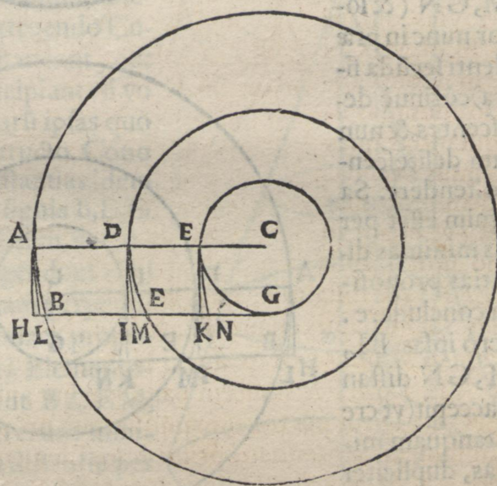
B *H*, *E I*, G K distantijs; ipsas verò B *H*, E *I*, *G* K esse dictas minimas. nam in ipsis etiam B L, E M, G N verum est dicere quòd distãtia *E* M minor est quàm G N, & B L quam *E* M. cùm enim ipsæ A L, D M, F *N* inuicem parallelæ sint; sunt autem ipsę etiam A C, G L: igitur per tricesimamquartam propositionẽ, & primam Communem Sententiam primi libri Elementorum *E*uclidis bis sumptas L M æqualis est ipsi *H I*, & M *N* ipsi *I K*. quare ablatis communi *H* M, & communi *I N*: erit per tertiam Communem Sententiam eiusdem bis sumptam *H L* æqualis ipsi *I* M, & *I* M æqualis ipsi K *N*. Si ergo ipsis B *H*, *E I*, G K iam demonstratis inæqualibus distantijs ipsæ *H* L, *I* M, K *N* æquales adiungantur distantiæ: erit per quartam Communem Sententiam eiusdem tota distantia B *L* minor quàm tota *E* M; & similiter tota *E* M

minor

minor quàm tota G*N*. Quod erat demonstrandum. *H*oc modo igitur ipsæ Rabbi ostendit, concluditque propositum. Verùm hìc magnopere animaduertendum est, quòd ipsæ, quæ à nobis quærun tur minimæ distantiæ, non sunt neque ipsæ B*H*, *EI*, GK, vti diximus: neque ipsæ BL, *E*M, G*N*, vt fortè Rabbi putauit. hæ namque nec in plano, nec in rotundo Cono minimæ possunt esse distantiæ, cùm ipsis B*H*, *EI*, GK non minimis in vtroque Cono distantijs maiores in vtroque Cono sint: in plano quidem, vt patet per nonam Communem Sententiam primi libri Elementorum Euclidis: in rotundo verò, quia obtusiorem subtendunt angulum, contentum scilicet à recta GL, & qualibet ipsarum B*H*, *EI*, *G*K distantiarum, vt in rotundo Cono inspicienti manIfestum est. *N*on sunt itaque minimę distantiæ neque ipsæ B*H*, *EI*, GK, neque ipsæ BL, *E*M, GN: neque vllæ aliæ, quæ commodè in plano possint ostendi. quum etenim reuera earum extremitates inter signa B, *H*; & *E*, *I*; & G, K caderent, quales sunt in sequenti tertia figura ipsæ BL, *E*M, GN; fieri verò nequaquam potest per sextādecimam propositionē tertij libri Elem. Eucl. vt inter ipsas A*H*, D*I*, FK perpendiculares, & circulorum circunferentias vllæ rectæ lineæ cadant, quæ ipsas minimas distantias in recta G*H* linea distinguant: idcirco malè in plano ipsæ veræ minimæ distantiæ ostendi possunt. ni fortè quis exempli causa inter ipsas A*H*, D*I*, FK perpendiculares, & circulorum circunferentias quasdam rectas lineas falsò designatas supponat, vt nos in præsenti figura fecimus, vt verum

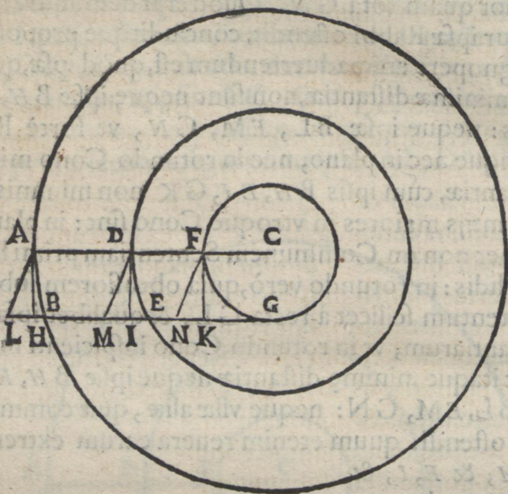
Cōclusio ipsius Rabbi imperfecta in non minimis distātijs.

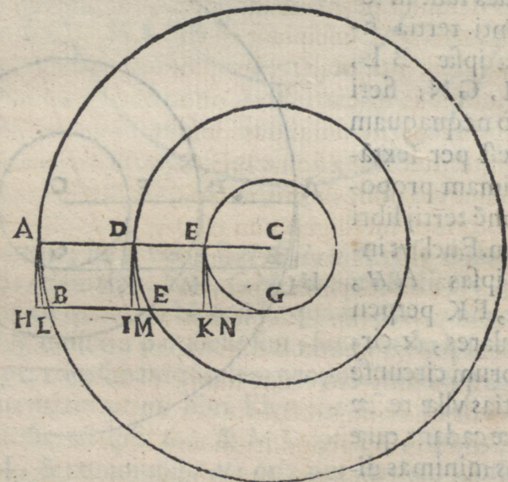
Notandum.



minimarũ distantiarum locum, quem in rotundo Cono sortitę sũt, in plano etiã ostẽ deremus. hæc autem fuit causa ꝙ ipse Moyses malè minimas, ipsas ostenderit distantias. nam si ipsas quidem B*H*, *E I*, G*K* pro minimis accepit distantijs; superuacaneũ erat ipsas etiã BL, EM, GN (& loquor nunc in præcedenti secũda figura) cõtinuè decrescentes, & nunquam delitescentes ostendere. Satis enim esset per ipsas minimas distantias propositum concludere. si verò ipsas BL, EM, GN distantias accepit (vt credo) tanquam minimas, dupliciter deceptus est: primò quoniam ipsę tum in plano tum in rotundo Cono nequaquam minimæ sunt, vt iam ostendimus: secundò quia si etiam essent minimæ, paralogismum maximum ipse cõmittit dum per hasce, scilicet BL, EM, GN distantias concludit intentum; quandoquidem nõ eædemmet ipsę

Error ipsius Rabbi.

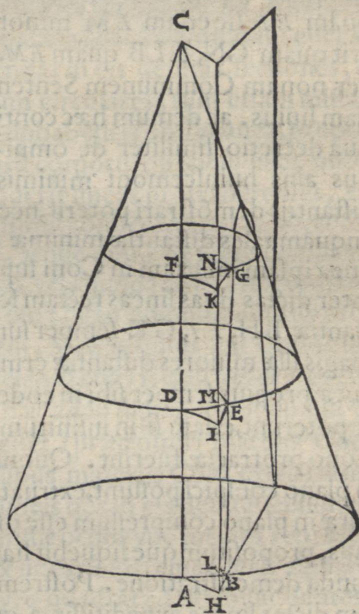




permanent

permanent in Cono rotundo, quæ in plano Cono sunt, quod vtiq; ipsis B*H*, *EI*, GK accidebat, sed variæ fiunt: atque propterea non rectè concludit ipse Rabbi cùm ex earum continua in plano diminutione, & ineuanescentia, in rotundo etiam Cono eas continuè decrescere, & nunquam aboleri ostendit. Quùm itaque minimæ distantiæ, per quas recta G*H* à punctis B, E, G distare potest commodè in plano ostendi non possint: alio quodam artificio in rotundo Cono reperiendæ sunt, atque ex ipsarum B*H*, *EI*, GK non minimatum distantiarum tum in plano, tum in rotundo Cono perpetua versus Coni basim decretione, nullaque exinanitione, in ipsis veris minimis distantijs in rotundo Cono repertis propositum nostrum concludendum est. Repertis igitur in plano (vt in superioribus figuris) ipsis B*H*, *EI*, GK non minimis distantijs continuè decrescentibus, & nunquam euanescentibus, quæ etiam in rotundo Cono eandem subeunt affectionem, cùm in extruendo Cono eædemmet permaneant, nec vllam varietatem suscipiant: si voluerimus virtute istarũ ipsas quoque minimas in extructo Cono rotundo reperire distantias idem patientes, ducãtur à signis B, E, G (& quicquid nunc dicam, in Cono rotundo intelligendum est) ad rectam K*H* lineam perpendiculares per duodecimam propositionem primi libri Elementorum Euclidis, quæ sint B*L*, E M, GN. quæ profectò erunt minimæ, quas quærimus distantię per decimamnonam propositionem primi libri eorundem; cùm omnes aliæ rectæ lineæ ab eisdem B, E, G punctis ad eandem K*H* rectam lineam ex quauis parte ductæ maiorem per tricesimamsecundam propositionem eiusdem primi libri Elemen. subtendant angulum, nempe rectum. *H*æ itaque sic repertæ minimæ distantiæ quoniam per secundam partem vicesimæ-

Modus reperiendi minimas distantias in Cono rotundo.



vicesimæ octauæ propositionis eiusdem primi inuicem parallelæ sunt, & vnà cum parallelis BH, EI, GK non minimis distantijs, & cum recta linea KH triangula claudunt similia per secundam partem vicesimænonæ, & tricesimæsecundę propositionis, & tertiam Communem Sententiam primi, & quartam propositionē, & primam definitionem sexti libri Elementorum Euclidis: igitur quemadmodum EI minor est quàm GK, & BH minor quàm EI; sic etiam EM minor erit quàm GN, & LB quàm EM. per nonam Communem Sententiam huius. ac demum hæc continua decretio similiter de omnibus alijs huiuscemodi minimis distantijs demōstrari poterit, nec vnquam tales distantiæ minimæ ita imminui possunt vt recta KH linea ipsam inflexam in Coni superficie iacentem tangat. Si enim inter dictas duas lineas rectam scilicet, & inflexam maiores illæ distantiæ BH, EI, GK semper sunt, vt superiùs ostendimus; tantò magis illæ minores distantiæ erunt, atque idcirco nunquam illę duę lineæ propiùs semper sibi in eodem plano accedentes sese contingere poterunt, etiam si in infinitum versus Coni basim vnà cum toto Cono protractæ fuerint. Quoniam autem hæc, quę diximus ægrè in plano conspici possunt, extruatur Conus ille, quem superiores figuræ in plano compressum esse ostendunt, & fiant omnia sicut diximus, propositumque liquebit haud dissimiliter quàm in nostra secunda demonstratione. Postremò verò docet Rabbi Moyses duas iam dictas lineas expeditissima quandam via in eodem plano designare, quæ talis est. Fiat Conus ex Rapa, vel quadam alia tractabili, facileque sectili materia, in quo ducatur primùm à vertice vsq; ad basim recta linea, qualis est ipsa ADFC: deinde secetur Conus plano quopiam parallelo superficiei planæ trianguli per axem, cuius

Cōclusio per secta in minimis distātijs.

Expeditissima via in Cono rotundo describendi duas lineas in eodē plano nūquam coincidentes, & semper sibi magis appropinquantes.

cuius trianguli latus est ipsa A C recta linea; planumque illud secans Conum sit verbi gratia Papyrus: post modum designetur in ipso Papyro linea B E G iuxta communem ipsius plani, & conicæ superficiei sectionem, quæ nimirum erit inflexa, Hyperbolicaue linea rationibus superiùs dictis: postea ducantur à punctis A, D, F rectæ lineæ A H, D I, F K ad angulos rectos ipsi A C, quæ tangant circulos in signis A D F; & producantur quousque occurrant in H, I, K punctis plano secanti Conum extra conicam superficiem producto; & ducatur recta linea transiens per H, I, K puncta; ac demum inueniantur (vt docuimus) minimæ distantiæ G N, E M, B L, quæsitumq; factum erit. Recta.n. H K, & inflexa G E B semper propiores fieri, & sibi nunquam occurrere superioribus rationibus demonstrabuntur, eruntque ambæ in eodem Papyro plano designatæ. Hoc modo ipse Rabbi cõsulit expeditè propositum assequi posse. Veruntamen (vt mihi videtur) neque Rapa ipsa, neque lignum, neque aliud corpus opacum satis commodum esset ad extruendos Conos ipsos, & faciendas in eis debitas sectiones, & protrahendas lineas tum rectas, tum circulares, tum etiam mistas, punctaq; omnia sectionum literis alphabeticis obsignanda, proposi ti demonstrandi gratia. nam ipsorũ corporũ opacitas esset nobis impedimento, vt non oẽs, quas libuerit lineas protraheremus, vel protractas vno oculorum intuitu simul cõspiceremus. ni forte fortuna corpora illa conica diaphana, atque omni ex parte conspicua essent; vtpotè Vitrea, vel Crystallina, vel cuiusdã alius eiusmodi materiæ transparentis. quod tamen esset factu admodũ difficile propter earum materiarum fragilitatem. Meliùs igitur erit Conos ipsos construere lineis æneis, vel ferreis, vel etiã (si quis vellet) argenteis, & aureis: doctrina siquidem hæc adeo digna, & nobilis est, vt argento, atq; auro, & alia (si qua esset) præciosiori materia Coni ipsi confici mereantur. nam si talibus materijs Coni extruantur, dubio procul puris materialibus lineis oẽs in eis debitæ sectiones: necnon lineæ rectæ, circulares, & mistæ oculis vno intuitu repræsentari: punctaq; omnia sectionum, & linearũ extrema literis alphabeticis super paruissima facta ex Papyro quadrata describi, ac demum in Cono tenaci quadam materia debitis locis applicari, vel etiam (quod melius est) in ipsa eadem metalli materia exculpi poterunt. Tot autem pro Dilucidatione quoq; libelli Rabbi Moysis Narbonensis à nobis dicta sufficiant.

De materijs Conorũ extruendorũ.

Materiæ cõmode ad extruẽdos Conos.

PERORATIO.

HAEC igitur Camille vir clarißime circa ipsum admirandum Geometricum Problema iam à te mihi propositum erant dicenda. Quoniam autem ad finem suscepti negotij Dei Opt. Max. auxilio peruenimus, modò reliquum est, vt eum Rabbi Moysis Aegyptij locum excerptum ex primi libri capite septuagesimotertio sui operis inscripti Director dubitantium, quippequem in huius operis Præfatione tetigimus, diligenter exponamus, sicut ibi promisimus.

FINIS.

PARS QVAEDAM EXCERPTA EX CAPITE LXXIII

Primi Libri Operis Rabbi Moysis Aegyptij, quod vocatur Director dubitantium.

SCIAS igitur lector huius capitis quòd cùm cognoueris animam cum suis virtutibus, fueritque tibi certa quælibet pars earum iuxta veritatem suæ essentiæ: scies quòd virtus imaginatrix inuenitur in quamplurimis animalibus, nempe in omnibus animalibus perfectis, quę habent cor. quòd enim imaginatio in his existat, notum est. & homo non discrepat ab eis imaginatione. & operatio imaginationis non est operatio mentis, sed ipsi opposita. quoniam mens dissoluit composita, & separat eorum partes, & facit ea simplicia, & incomposita in essentia, & causa eorum: & considerat ex vna re multas, inter quas est differentia apud mentem, quemadmodum est differentia inter duo indiuidua speciei humanę apud imaginationem. Præterea in mente separatur res vniuersalis ab indiuidua, & non verificatur aliqua demonstratio nisi in vniuersali. & in mente dignoscitur prædicatum substantiale ab accidentali. Verùm imaginatio nullam harum operationum habet. quoniam ipsa non considerat

Quo differat mens ab imaginatione.

Mentis operationes.

Imaginationis operationes.

ſiderat niſi indiuiduum compoſitum eo modo, quo à ſenſibus apprehenditur: vel coniungit res in eſſentia diuerſas, easque componit vnam partem cum alia, & ex omnibus vnum conficit corpus, aut vnam virtutem ex virtutibus corporalibus, quemmadmodum poteſt imaginari Phantaſia hominem cum capite equi, habentem alas, & id genus alia. quod quidem vocatur falſitas, & mendacium. cùm nulla res exiſtens in rerum natura ei correſpondeat. Nec vllo pacto poterit imaginatio rem vniuerſalem conſiderare, ſeque abſtrahere à materia dum conſiderat; quanuis etiam ipſa forma eſſet penitus in infinito gradu ſeparata. Quare non eſt in Imaginatione certa cognitio. Amplius audi quantùm nos iuuarunt ſcientiæ Mathematicæ, & quàm magnum bonum eſt, quod ab ipſis per ſuas præmiſſas didicimus. Scias quòd quædam ſunt, quæ cùm in Imaginatione conſiderantur, non apprehenduntur: ſed inuenitur impoſſibilitas impreſſionis eorum, ſicut impoſſibilitas coniunctionis duorum contrariorum. Poſtea verò demonſtratione verificabitur exiſtentia illius rei, quæ videbatur impoſſibilis Imaginationi: exiſtentiaque ipſam reperiet. Exempli gratia ſi excogitaueris Sphæram rotundam magnam cuiuſuis quantitatis, licet etiam eam imaginatus fueris magnam ſecundùm amplitudinem Sphæræ Vniuerſi: poſthoc excogitaueris dimetientem tranſeuntem per eius Sphæræ centrum: deinde imagi-

Cõfirmat exẽplis duobus Mathematicis Mentis ab Imaginatione diſcrepantiam.

Exemplũ primũ Aſtrologicum.

natus fueris duos homines stantes super duabus extremitatibus ipsius dimetientis, ita vt pedes eorum sint oppositi secundùm dimetientis rectitudinem, sintque dimetiens, & pedes in vna recta linea: Necesse est quòd dimetiens sit aut è regione Opaci, aut non è regione; si fuerit è regione, cadent ambo; si verò non fuerit è regione, cadet alter eorum, qui est in inferiori parte, alter autem stabit. Hoc modo consideratur hoc ab Imaginatione. Nihilominus demonstratione notum est quòd terra rotunda sit, necnon posita super duabus dimetientis extremitatibus: & vtriusque habitantium in duabus extremitatibus caput est versus cœlos, & pedes ipsius sunt oppositi versus pedes alterius existentis in extremitate dimetientis: nec fieri potest vt alter eorum cadat. quoniam non est verum quòd alter eorum supra, & alter infra sit: sed vterque eorum est tum supra tum infra, cùm fuerint relati adinuicem. Similiter demonstratum est in libro secundo de Conicis, quòd possunt in eodem plano exire duę lineę, quæ in principio sunt aliquantulùm distantes ab inuicem, & quantò magis protrahuntur, diminuitur distantia, & appropinquant sibi: nec tamen inuicem coniunguntur, licet in infinitum producantur, alteraque alteri appropinquet. Istud autem non potest excogitari, neque in Imaginationem cadit. Earum duarum linearum altera est recta, & altera curua, sicut ibi declaratum est. Exemplum secūdū Geometricum.

Ecce

Ecce igitur quòd nota est existentia eius, quod excogitari non potest, nec ab imaginatione comprehendi; imo est impossibile apud ipsam. Similiter autem demonstrata est impossibilitas eius, quod imaginatio affirmat. verbi causa quòd Deus sit corpus, aut virtus in corpore. quoniam apud imaginationem non reperiuntur nisi res corporeæ, &c.

Exemplum tertium Metaphysicum.

FRANCISCI BAROCII COMMENTARIVS.

QVANDOQVIDEM in Præfatione nostri Operis, in quo admirandum illud Geometricum Problema tredecim modis demonstrauimus; verba Rabbi Moysis Aegyptij, quibus iam dicti Problematis mentionem fecit, exponere promisimus: in præsentia tempus, & locus expostulat, vt promissionem nostram adimpleamus. Quoniam autem in principio iam dicti Operis nostri inter Autores, qui Problema illud imperfectè demonstrarunt, ipsum quoque Rabbi Samtou posuimus, de cuius imperfecta Demonstratione nullum verbum in Opere nostro fecimus (omnium siquidem imperfectas Demonstrationes ventilauimus præter Demonstrationem innominati Autoris, cùm eadem cum Orontij Demonstratione sit; & ipsius Rabbi Samtou, quam tanquam omnium imperfectissimam Opere nostro indignam iudicauimus) non ab re factũ iri existimo, vt ipsius etiã nondũ (quod ego sciã) ex Hebraico in Latinũ sermonẽ cõuersæ Demõstrationis maxima imperfectio cognoscatur, si eam in fine huiusce nostri Cõmentarij subscripserimus, de eaque breuiter sententiã nostrã in medium attulerimus. Primùm igitur ad expositionem verborum Rabbi Moysis Aegyptij accedentes dicimus, quòd volens ipse Moyses in capite septuagesimotertio primi libri sui Operis inscripti Director dubitantium docere quo differat Mens ab Imaginatione, inquit quòd quilibet Philosophiæ studiosus cùm cognouerit Animam cum suis virtutibus, id est potentijs, earumq; partibus iuxta veritatem suæ essentiæ: sciet quod virtus

Imaginatrix multùm à Mēte differt. Et primùm quidē ostēdit ipse Rabbi differentiā Mentis ab Imaginatione ex hoc, q Mens quidē in nullo alio animali reperitur, nisi in homine, qui rationis est particeps; Imaginatio verò inuenitur non solùm in homine, verumetiam in quamplurimis animalibus irrationalibus, nempe in omnibus animalibus perfectis, quæ habent cor. Philosophi enim, qui de animalibus scripsere, animalia perfecta ab imperfectis hoc distinxerunt; quòd perfecta quidem habent cor, imperfecta verò corde carent. & perfecta quidem animalia ponunt omnes Imaginationem habere, & quo ad Imaginationem ab homine minimè discrepare. quam quidem Mentis ab Imaginatione differentiam à subiecto desumptam cùm ita Rabbi Moyses explicuerit, volens adhuc meliùs Mentem ab Imaginatione iuxta quoque earum operationes distinguere, ait quòd operatio Imaginationis non est operatio Mentis, sed ipsi opposita; vt ex ipsa operationum varietate duarum etiam harum Animæ potentiarum ostendat discrepantiam. Quòd autem Imaginationis operatio Mentis operationi opposita sit, probat primum rationibus Naturalibus comparando Mentis operationes operationibus Imaginationis: deinde quadam alia ratione idem probat, quam duobus Mathematicis exemplis confirmat: ac demum alio quodam Metaphysico exemplo earundem operationum discrepantiam comprobat. Ait igitur quòd Mens quidem dissoluit composita, & separat eorum partes, & facit ea simplicia, & incomposita in essentia, & causa eorum: & considerat ex vna re multas, inter quas est differentia apud Mētem, quemadmodum est differentia inter duo indiuidua speciei humanę apud Imaginationem. quoniam (inquit) ipsa Imaginatio non considerat nisi indiuiduum cōpositū eo modo, quo à sensibus apprehēditur: vel coniungit res in essentia diuersas, easque componit vnam partem cum alia, & ex omnibus vnum conficit corpus, aut vnam virtutem ex virtutibus corporalibus. quemadmodum potest imaginari Phantasia hominem cum capite Equi, habentem alas, & id genus alia. quod quidem vocatur falsitas, & mendacium; cùm nulla res existens in rerum natura ei correspondeat. Ecce pulcherrima comparatio operationis Mentis operationi Imaginationis, per quam sibiinuicem oppositæ ostenduntur. Nam imaginatio quidem considerat indiuiduum compositum eo modo, quo à sensibus apprehenditur: verbi gratia hominem hūc, vel illum quatenus magnus est, vel paruus; & al-

Comparatio prima operationis Mētis operationi Imaginationis.

& albus, vel niger; & doctus, vel ignarus; & calidus, vel frigidus; alijsque similibus accidentibus præditus: vel etiam coniungit res in essentia diuersas, easque componit, & ex omnibus vnum conficit corpus, aut vnam virtutem ex multis virtutibus corporalibus, aut quamlibet sibi placuerit Chimeram conformat. Mens verò è contrario ipsum hominis indiuiduum varijs accidentibus præditum, ex diuersisque partibus, & Elementis compositum dissoluit in partes, & simplicia tum elementa, tum accidentia; & considerat ex vna re multas quoad vniuscuiusque seorsum essentiam, & causam, dignoscens, atque distinguens prædicatum substantiale ab accidentali. inter quas partes simplices ea est apud Mentem differentia, qualis est inter duo composita speciei humanę indiuidua apud Imaginationem. Quare manifestum est quòd Mentis operatio prorsus Imaginationis operationi opposita sit. Præterea (inquit) in Mente separatur res vniuersalis ab indiuidua, & non verificatur aliqua demonstratio, nisi in vniuersali. At Imaginatio (inquit) nullo pacto poterit rem vniuersalem considerare, seque abstrahere à materia dum considerat; quamuis etiam ipsa forma esset penitus in infinito gradu separata. Hæc est alia pulcherrima comparatio operationis Mentis ad operationem Imaginationis, ex qua etiam euidenter apparet hasce duas operationes esse sibi oppositas. Mens enim vniuersalia considerat separans ea à particularibus, & indiuiduis; & abstrahens à quacunque materia; in ipsisque vniuersalibus tantùm demonstrationes suas facit. Imaginatio verò res particulares, & indiuiduas, atque in aliqua materia immersas considerat, quamuis etiam ipsæ formæ, quæ ab Imaginatione apprehenduntur essent penitus in infinito gradu separatę. hoc est quòd tales essent, vt ab omni materia separatæ prorsus existerent. cuiusmodi sunt, quæ à Philosophis substantiæ separatæ vocantur. vt Deus, Angeli, Dæmones, & ipsa hominis Mens. quæ profectò separatæ substantiæ nullo pacto ab Imaginatione apprehendi, cognoscique possunt, nisi falsò modo corporeæ, materialesq; à sensu sibi offerantur. Vnde cùm Imaginatio neque in vniuersalibus demonstret, neque abstrahat à materia, non immerito inquit ipse Rabbi Moyses [Quare non est in Imaginatione certa cognitio.] Hactenus Rabbi Moyses iam dictis naturalibus rationibus probauit operationem Mentis esse oppositam operationi Imaginationis. Nunc autem idem quadam alia ratione probat, quam

Secũda cõparatio operationis Mẽtis ad operationẽ Imaginationis.

duobus

duobus Mathematicis exemplis confirmat dicens [Ampliùs audi quantum nos iuuarunt ſcientiæ Mathematicæ, &c.] Quædam (inquit Rabbi Moyſes) ſunt, quæ cùm Imaginatione conſiderantur, non apprehenduntur ſtatim ab ipſa Imaginatione: imo videntur ei eſſe ex numero eorum, quæ fieri non poſſuut; quemadmodum fieri non poteſt vt duo contraria ſimul in eodem ſubiecto, eodemmet tempore coniungantur: poſtea verò (inquit Rabbi) Demonſtratione verificabitur exiſtentia illius rei, quæ videbatur Imaginationi fieri minimè poſſe; veraque ipſius rei exiſtentia rem ipſam ita ſe habere reperiet. Hoc eſt quibuſdam rebus Imaginatio non aſſentit, donec diſcurrens cogitatio cauſas earum inueniat, ex quibus earum affectiones ita ſe habere demonſtret, Mensque demum eas tanquam euidentes percipiat, tuncque Imaginatio Menti conſentiens conquieſcat. Hac itaque ratione ipſe Rabbi probat Mentis operationem ab operatione Imaginationis multùm differre, imo inter ſe oppoſitas eſſe. quam equidem rationem duobus Mathematicis exemplis confirmat his verbis [Exempli gratia ſi excogitaueris Sphæram, &c.] Primum Mathematicum, nempe Aſtrologicum exemplum eſt huiuſmodi. Si quis excogitauerit Sphæram quandam magnam cuiuslibet quantitatis, licet etiam eam imaginatus fuerit eius amplitudinis, cuius eſt Sphæra Mundi: poſthoc excogitauerit duos homines ſtantes ſuper extremitatibus dimetientis iam dictæ Sphæræ, ita vt pedes eorum ſint indirectum oppoſiti ſecundùm dimetientis ipſius rectitudinem, vt ſcilicet Antipodes ſint. neceſſe eſt ipſam dimetientem eſſe ſitam reſpectu excogitantis aut à parte dextra ad ſiniſtram ipſius Sphæræ, aut à parte Ante ad partem Retro, aut à parte Superiori ad Inferiorem. id enim ſignificant illa ipſius Rabbi verba [aut è regione Opaci, aut non è regione] nam illa quidem particula [è regione Opaci] ſignificat ſitum dimetientis, vel à parte dextra Sphæræ excogitatæ ad ſiniſtram, vel à parte Ante ad Retro reſpectu excogitantis: illa verò [non è regione] denotat ſitum ipſius dimetientis à parte ſuperna Sphæræ excogitatæ ad infernam reſpectu eiuſdem excogitantis. Si igitur dimetiens ipſa (vt ipſius Rabbi verbis vtar) fuerit è regione Opaci, videbitur excogitanti quòd cadent ambo illi Antipodes, quoniam neuter eorum habet caput ſurſum, & pedes deorſum, ſed è regione Opaci; & ideo pedibus in Opaco, ideſt in Sphæra ipſa

Primum Mathematicum Exemplum.

Kk Opaca

Opaca excogitata insistere minimè possunt: Si verò non fuerit è regione, videbitur excogitanti ꝙ cadet alter eorum, qui est in inferiori Sphæræ parte; alter autem stabit, cùm in superiori Sphæræ parte sit. Hoc itaque pacto hæc ab Imaginatione considerantur. nihilominus Astrologis demonstratione notum est quòd globus Terræ, & Aquæ rotundus sit, & super duabus suæ dimetientis extremitatibus habitent Antipodes, & vtriusq; eorum caput sit versus Cœlos, & pedes versus centrum Vniuersi: nec fieri potest vt alter eorum cadat. quoniam non est verum (vt Imaginatio falsò imaginabatur) quòd alter eorum supra, & alter infra sit: sed vterque eorum est tum supra, tum infra cùm relati fuerint adinuicem. reuera autem vterque habet caput quidem sursum, pedes verò deorsum. quippequum Sursum quidem secundùm Philosophos, & Cosmographos versus Cœlum, Deorsum verò versus centrum Vniuersi semper sit: & omne graue sui natura deorsum, quemadmodum omne leue sursum tendat. quam profecto rem Lactantius Firmianus, nonnullique alij Philosophi cùm iuxta Mentis veram perceptionem non intellexissent, sed iuxta falsam Imaginationis apprehensionem excogitassent, negarunt Antipodes dari, quia (inquiunt ipsi) si darentur, caderent. Sequitur autem ipse Rabbi comprobans eandem rationem secundo Mathematico, scilicet Geometrico exemplo his verbis [Similiter demonstratum est in libro secundo de Conicis, &c.] Ait igitur quòd demonstratum est in libro secundo Conicorum Elementorum Apollonij Pergæi (vt in superiori nostro Opere in quarta Demonstratione declarauimus) quòd possunt in eodem plano designari duæ lineæ, altera recta, & altera curua, quæ in principio sunt aliquantulum ab inuicem distantes, & quantò magis protrahuntur, diminuitur inter eas distantia, & appropinquant sibi: nec tamen inuicem vnquam coniunguntur, licet in infinitum producantur. Istud autem (inquit ipse Rabbi) non potest excogitari, neque in Imaginationem cadit, nec ab ea comprehendi potest; imo apud ipsam Imaginationem ex eorum est numero, quæ nequaquam fieri possunt: cuius tamen rei existentiam esse veram euidenter Mens ipsa percipit, cùm à cogitatrice discurrenti Animæ virtute, seu potentia, quæ à Græcis διάνοια dicitur, ita se habere Geometricis rationibus demonstratum fuerit. Quæ quidem Rabbi Moysis verba sic exponenda, intelligẽdaq; sunt (quemadmodum etiam in Præfatione superioris Operis nostri diximus) alioquin falsum diceret.

Lactantij Firmiani, & aliorum error.

Secundũ Mathematicum Exemplum.

Vide quæ in Præfatione dicta sunt.

ceret. falsum enim est quòd prorsus rebus iam dictis Imaginatio non assentiat, ac conquiescat postquam demonstratæ, & vt veræ à Mente perceptæ fuerint. Postremò verò sequitur Rabbi confirmans operationem Imaginationis esse oppositam operationi Mentis tertio quodam Metaphysico exemplo sic dicens [Similiter autem demonstrata est impossibilitas eius, quod Imaginatio affirmat: verbi causa quòd Deus sit corpus, aut virtus in corpore. quoniam apud Imaginationem non reperiuntur nisi res corporeæ.] Hoc tertium exemplum Metaphysicum, quo etiam probat idem quod ab initio proposuerat, videlicet Imaginationis operationem non esse eandem cum Mentis operatione, imo ipsi oppositam, tale est. Quoniam à Metaphysicis quidem demonstratum est quòd Deus sit incorporeus, & virtus sine corpore, & immaterialis, & eo modo à Mente percipitur; Imaginatio verò, cùm non apprehendat nisi res corporeas, & materiales, idcirco affirmat Deum esse corporeum, aut virtutem in corpore: hinc quoque perspicuum est operationem Imaginationis, operationi Mentis oppositam esse. Hæc autem pro declaratione, dilucidationeq; verborum, & mentis Rabbi Moysis Aegyptij in septuagesimotertio capite primi libri sui Operis vocati Director dubitantium breuiter à nobis quoq; dicta sint. — Tertiũ Exẽplum Metaphysicum.

Modò reliquum est vt demonstrationem superiùs dictam ipsius Rabbi Samtou expositoris iam dicti operis appositam in commentario eiusdem septuagesimi tertij capitis dicti Operis, qualiscunque sit ex Hebraico in Latinum sermonem fideliter conuersam hìc subiungamus, nostrumque de ipsa iudicium afferamus.

Rabbi Samtou Demonstratio.

Dari duas lineas, inter quas à principio sui ortus sit distantia determinata, & quò magis procedant, sibi inuicem proximiores fieri: & fieri non posse vt coincidant, licet in infinitum producantur; & vnam istarum linearum esse rectam, alteram verò curuam. — Propositio.

Supponamus hoc vnum suppositum dicentes demonstrationem huius Theorematis explicari corpore solido in figura conica formato, cuius de- — Expositio.

scriptio sit huiusmodi. Vt sit latũ ab inferiori sui parte circulari, & in angustum paulatim tendat, quousque terminetur in punctum. & pars lata istius Coni, vocatur Basis; & pars altera angusta, siue acuta, dicitur Caput. Animaduerte centrum circuli Basis esse è directo Capitis, seu Verticis Coni per lineam rectam, vt si produxeris lineam à centro circuli basis ad verticem, siue caput Coni, ad Apicem ipsius terminabitur. & hæc linea protensa à centro Basis ad apicem Coni, vocatur Columna, idest Axis, siue recta linea perpendicularis; quia veluti columna astat super centro Basis. & idcirco linea recta illa, quæ nobis apparet in hoc solido corpore Cono vocato, illa sanè est linea, quæ diuidit ipsum Conum in duas partes æquales. cuius diuisio à puncto capitis ipsius Coni incipit, & in punctum circunferentiæ circuli ipsius basis terminatur. Quapropter hoc conicum corpus in duas æquales partes diuiditur describendo hanc lineam prædicto modo. Verùm linea curua erit quæcunque linea describetur prope rectam lineam dictam vel ad sinistras, vel ad dextras; quæ diuidet Conum in partem dimidio minorem, & necessariò erit curua, cùm non transeat per punctum Apicis ipsius Coni. quia cùm apponitur super figuram Hyperbolicam, necessariò magis distat à linea recta in principio ipsius Coni, quàm pars illius altera, quæ est ad basim. veluti infra demonstrabimus. Sequitur ergo hanc lineam diuidentem Conum in partem dimidio minorem, esse curuam. quia ducitur, siue accommodatur super figuram Hyperbolicam. & hoc sensui palam est. Probemus ergo sic dicentes: Supponamus inter hasce duas lineas, rectam scilicet, & curuam intercedere superficiem vnius palmi, & hæc superficies sit æqualis quantitate palmi in omnibus Coni lateribus ad faciem Coni. hoc est vt semper superficies inter hasce duas lineas prædictas per distantiam vnius palmi tum ad caput ipsius Coni, tum ad basim intercedat. Et dicamus manifestum esse distantiam maiorem inter hasce duas lineas intercedentem esse versus caput Coni. nam quò magis accedit linea illa curua versus caput, eò magis augebit flexum in arcus formam; & quò magis flectetur in formam arcus, augebitur quæ inter ipsas intercedit distantia. & erit chorda istius arcus maior quàm partes chordarum cæterarum, quæ fient ad basim. & probatio ipsius hæc erit. Quòd si fingamus produci perpendicularem à dicta recta linea versus lineam curuam, & applicemus super dictam lineam curuam perpendicularem paruam, quæ attingat vno sui extremo lineam perpendicularem à dicta linea recta protensam, & altero sui extremo attingat lineam curuam: & fingamus extendi chordam à principio illius lineæ perpendicularis super lineam rectam apposita; à capite ipsius, quo coniungitur

Conus quid sit. Basis, & summitas Coni quæ sint. Axis Coni qui sit. Lateris Coni, & Trianguli per Axẽ Coni descriptio. Hyperboles descriptio. Constructio, Determinatio, & Demõstratio primæ partis.

tur cùm linea recta; & hæc extendatur versus caput perpendicularis par uæ lineæ super lineam curuam constitutæ, qua parte curuæ coniungitur. Sequetur ergo absque dubio chordam maiorem esse in hac parte prope Coni sumitatem, quàm in cæteris Coni partibus ad basim. eo quòd diameter, siue subtendens angulum laterum, quæ sunt lineæ descriptæ super lineis dictis, est maior quàm in cæteris partibus inferioribus. quia est diameter, siue subtendens angulum duorum maiorum laterum. & manifestum est diametrum, siue subtendentem maiorum laterum maiorem esse quàm diameter laterum minorum. Quòd si produxerimus dictis lineis similes lineas versus basim ipsius Coni, tunc erit chorda illa minor; quia linea perpendicularis parua, quæ ducitur, minor quàm illa recta linea existit, & magis propinqua lineæ illi curuæ; quia quo magis tendit versus basim, eò magis minuit curuitatem. Quòd si apponamus chordam super dictas perpendiculares paruas versus basim positas super dictam lineam rectam, & curuam; quæ chordæ ducantur à principio vnius perpendicularis in alterum; tunc chorda hæc erit minor quàm chorda illa, quæ facta fuit versus Coni sumitatem; quia latera harum linearum sunt parua, & hac de causa necesse erit vt sit diameter, siue subtendens minor. & idcirco erit chorda minor quàm chorda versus caput Coni producta. Quapropter ex hoc patet omne magis curuum maiorem habere chordam: & quò minus fuerit curuum, minorem. Idcirco quò magis fuerit distantia inter duas illas lineas, eò maior in illa linea curua erit curuitas. & quò magis illa linea curua versus basim ibit, rectitudinem aliquantum emulabitur. & huic argumentum erit, quòd linea illa curua versus Coni caput magis distat à linea recta quàm cæteræ partes illius lineæ curuæ versus basim. Si supposueris enim produci lineas perpendiculares à linea illa recta in curuam illam lineam, videbimus sensu ipso, & ratione quoque lineam curuam magis distare à recta prope Coni sumitatem, quàm prope basim. Quare quò magis procedant iam dictæ lineæ per Conum versus basim, eò propiores inter se fient, quia curuitas inter ipsas intercedens minuetur: & nunquam coincident, quoniam inter ipsas superficies permanens palmi distantia è regione intercedit, sicuti supposuimus. quòd si coincidant, falsum sequetur, esse superficiem illius lineæ paruæ curuæ æqualem superficiei lineæ maioris rectæ.

Demonstratio secundæ partis.

Conclusio.

Et Deus nos ab erratis vendicet.

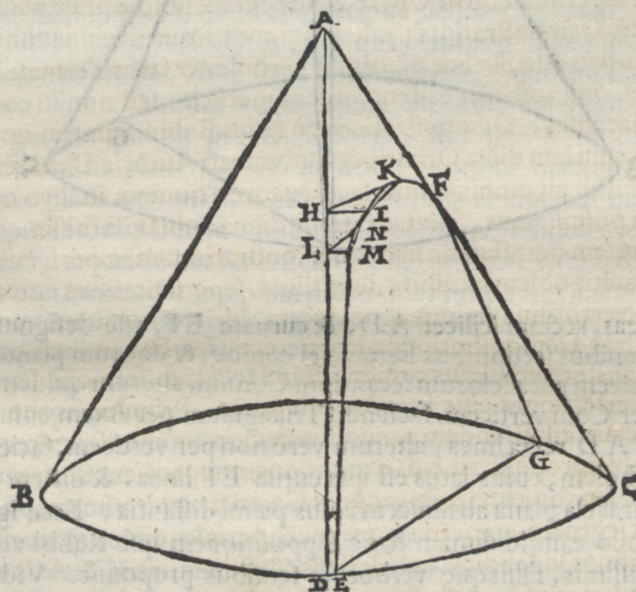
Sequitur

Sequitur Commentarius Francisci Barocij.

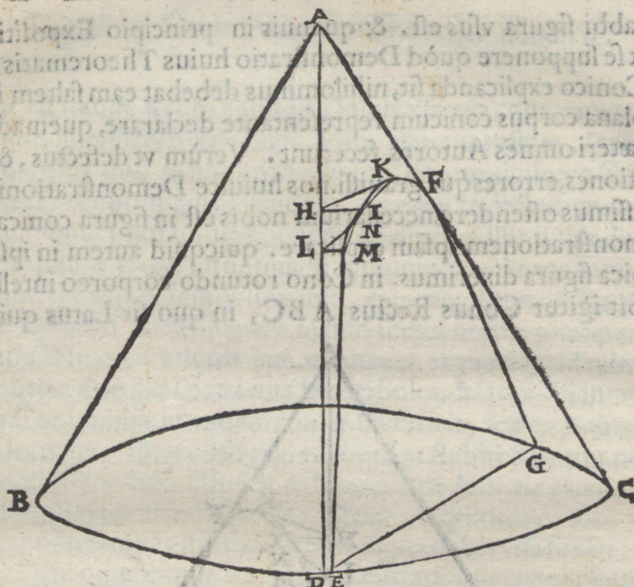
Hæc est itaque Rabbi Samtou Demonstratio, qua conatur ipse quoque demonstrare dari duas lineas alteram rectam, & alteram curuam, quæ quò magis producuntur, eò proximiores sibi inuicem fiant: & nunquam coincidant, etiam si in infinitum protrahantur. Quam porrò affectionem de duabus illis lineis demonstrat, de quibus etiam Orontius, & Innominatus Autor eam obscurè, imperfecteque demonstrarunt. quorum Demonstrationem nos in superiori nostro Opere in fine tertiæ nostræ præcipui Problematis Demonstrationis instaurauimus, atque dilucidauimus. Sunt autem duæ illæ lineæ latus Hyperboles, & latus Trianguli per Axem Coni, ambæ in eadem conica superficie, sed non in eodem plano iacentes. Demonstratio verò ipsius Rabbi Samtou non est eadem cum iam dicta Orontij, & Innominati Autoris Demonstratione, sed ab eis omnino diuersa. Quam eo quidem in loco nostri Operis posuissemus, si instauratione digna nobis visa fuisset. quoniam autem omnium de hac re demonstrationum imperfectissima est, & multis obscuritatibus, defectibus, superfluitatibus, grauissimisque erroribus vndequaque referta, idcirco noluimus eam inter nostras Demonstrationes interserere; sed hoc in loco potiùs eam transfere voluimus cuiusmodi in Hebraico sermone legitur, ac imperfectiones eius breuiter ostendere. Primùm itaque cùm iam dictam admirandam propositionem in modum Theorematis ipse Rabbi proposuerit, eius expositionem aggrediens declarat breuiter, & satis obscurè, & improprijs Geometriæ terminis, ac phrasibus (vt legenti Geometriæ non ignaro perspicuum erit) quasdam definitiones, videlicet Coni; & Basis, & Summitatis, & Axis eius; necnon Lateris Coni, & Trianguli per Axem; ac demum Hyperboles. quas nos in principijs superioris Operis nostri dilucidè tradidimus, ac declarauimus. Postquam autem iam dictas definitiones tradidit, mox demonstrationem suam aggreditur, ibi [Probemus ergo sic dicentes, &c.] Quæ quidem quàm obscura, confusa, atque imperfecta sit, licet cuilibet in Geometria versato Lectori perspicuum esse facilè poterit: nihilominus quasdam eius obscuritates, confusiones, imperfectiones, falsitatesque adnotabo. Primùm itaque Demonstratio ipsa obscurissima est, quoniam nulla

ipse

ipse Rabbi figura vsus est. & quanuis in principio Expositionis dixerit se supponere quòd Demonstratio huius Theorematis corpore Conico explicanda sit, nihilominus debebat eam saltem in figura plana corpus conicum representante declarare, quemadmodum cæteri omnes Autores fecerunt. Verùm vt defectus, & imperfectiones, errores que grauissimos huiusce Demonstrationis facilè possimus ostendere, necessarium nobis est in figura conica plana demonstrationem ipsam explicare. quicquid autem in ipsa plana conica figura dixerimus, in Cono rotundo corporeo intelligantur. Sit igitur Conus Rectus ABC, in quo sit Latus quidem Expositio.



Trianguli per Axim recta AD linea; Latus verò Hyperboles EFG, sit curua linea EF. Ait ergo Rabbi [Supponamus inter hasce duas lineas, rectam scilicet, & curuam intercedere superficiem vnius palmi, & hæc superficies sit æqualis quantitate palmi in omnibus Coni lateribus ad faciem Coni. hoc est vt semper superficies inter hasce duas lineas prædictas per distantiam vnius palmi tum ad Caput ipsius Coni, tum ad Basim intercedat.] Quod autem his verbis dicere vult, tale est. Supponamus hasce duas propositas

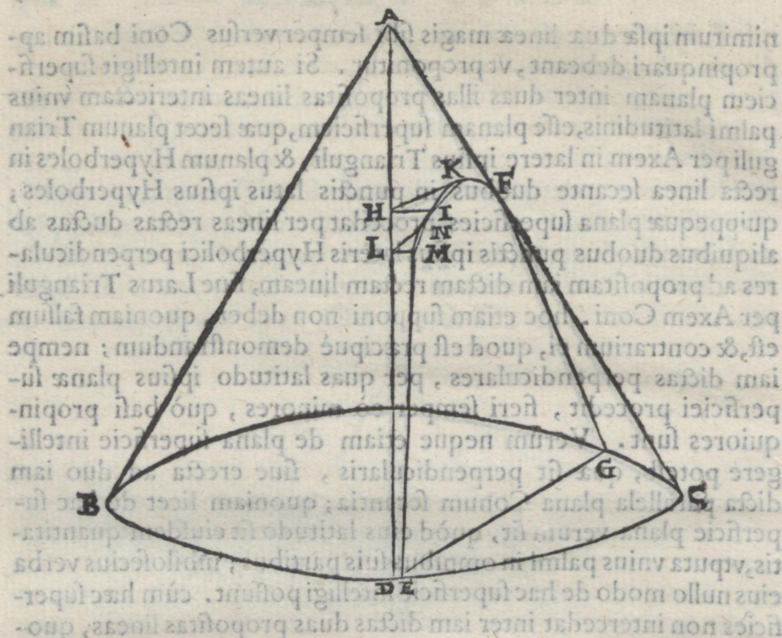


tas lineas, rectam scilicet A D, & curuam E F, esse designatas à communibus sectionibus superficiei conicæ, & duorum planorum sibi inuicem parallelorum secantium Conum, alterum quidem eorum per Coni verticem, faciendo Triangulum per Axem, cuius latus est A D recta linea; alterum verò non per verticem, faciendo Hyperbolem, cuius latus est ipsa curua E F linea. & distent hæc duo parallela plana ab inuicem vnius palmi distantia. Ecce igitur quomodo candidissimam hanc suppositionem ipse Rabbi verbis obscurissimis, falsisque verborum sensibus proposuit. Videtnr enim dicere, quòd supponatur inter illas duas, rectam scilicet, & curuam lineas interiectam esse superficiem vnius palmi ad faciem Coni, nempe in ipsa externa conica superficie. quod porrò falsum est. quoniam latitudo superficiei conicæ interiectæ inter iam dictas duas lineas, non debet esse, neque supponi eiusdem semper quantitatis in omnibus Coni partibus (vel, vt ipse impropriè ait, lateribus) tam versus sumitatẽ, quàm versus basim ipsius: cùm reuera superficies ipsa conica inter illas duas lineas interiecta, latior versus Coni summitatem, quàm versus basim ostendenda sit; si nimirum

Primus error ipsius Rabbi Samson.

nimirum ipsæ duæ lineæ magis sibi semper versus Coni basim appropinquari debeant, vt proponitur. Si autem intelligit superficiem planam inter duas illas propositas lineas interiectam vnius palmi latitudinis, esse planam superficiem, quæ secet planum Trianguli per Axem in latere ipsius Trianguli, & planum Hyperboles in recta linea secante duobus in punctis latus ipsius Hyperboles; quippequæ plana superficies procedat per lineas rectas ductas ab aliquibus duobus punctis ipsius lateris Hyperbolici perpendiculares ad propositam iam dictam rectam lineam, siue Latus Trianguli per Axem Coni. hoc etiam supponi non debet, quoniam falsum est, & contrarium ei, quod est præcipuè demonstrandum; nempe iam dictas perpendiculares, per quas latitudo ipsius planæ superficiei procedit, fieri semper eò minores, quò basi propinquiores sunt. Verùm neque etiam de plana superficie intelligere potest, quæ sit perpendicularis, siue erecta ad duo iam dicta parallela plana Conum secantia; quoniam licet de hac superficie plana verum sit, quòd eius latitudo sit eiusdem quantitatis, vtputa vnius palmi in omnibus suis partibus; nihilosecius verba eius nullo modo de hac superficie intelligi possunt. cùm hæc superficies non intercedat inter iam dictas duas propositas lineas, quoniam ipsas ambas attingere minimè potest, sed inter iam dicta duo parallela plana intercedit, quæ ipsas duas propositas lineas efficiunt. Quare nullo pacto illa verba accommodari possunt, vt veritatem exprimant; licet ipse seipsum exponens eandem falsitatem repetat, cùm dicat ipsam vnius palmi suppositam superficiem inter illas duas lineas prædictas intercedere. Quum autem hoc modo suppositionem hanc proposuisset, sequitur determinans primam Theorematis sui partem, inquiens [Et dicamus manifestum esse distantiam maiorem inter hasce duas lineas intercedentem, esse versus caput Coni. nam quò magis accedit linea illa curua versus caput, eò magis augebit flexum in arcus formam; & quo magis flectetur in formam arcus, augebitur quæ inter ipsas intercedit distantia. & erit chorda istius arcus maior quàm partes chordarum cæterarum, quæ fient ad basim.] Hæc est eius Determinatio, cuius sensus (quamuis ex eius verbis ægrè eliciatur) talis est. Dicimus distantiam maiorem esse inter hasce duas lineas, scilicet A D, & E F interiectam versus caput, siue summitatem Coni, quàm

Determinatio primæ partis Theorematis.



versus basim ipsius; vt proposuit prima pars Theorematis; quam videtur confirmare priùs quadam probabili non Geometrica ratione desumpta à maiori ipsius curuæ lineæ incuruatione, deinde vult probare idem alia ratione Geometrica desumpta ab inæqualitate quarundam chordarum subtendentium quosdam arcus ipsius inflexæ Hyperbolicæ lineæ. Quam inæqualitatem determinans proposuit illis verbis [& erit chorda istius arcus maior quàm partes chordarum cæterarum, quæ fient ad basim.] hoc est chorda arcus Hyperbolicæ lineæ versus summitatem Coni existens, erit maior quàm cæteræ chordæ arcuum Hyperbolicæ lineæ versus Coni basim existentes. quamuis ipse malè, & confusè loquutus chordas ipsas inferiores, vocauerit partes cæterarum chordarum. Hoc autem perperam, & obscurè, atque confusè proposuit; quoniam adhuc non declarauit quænam istæ arcuum inæquales chordæ sint, & quomodo reperiantur; ex quarum inæqualitate propositum demonstraturus est. Inæqualitatem autem harum chordarum demonstrat construens, atque arguens hoc modo, hisceque verbis [Et probatio ipsius hæc erit. Quòd fingamus produci

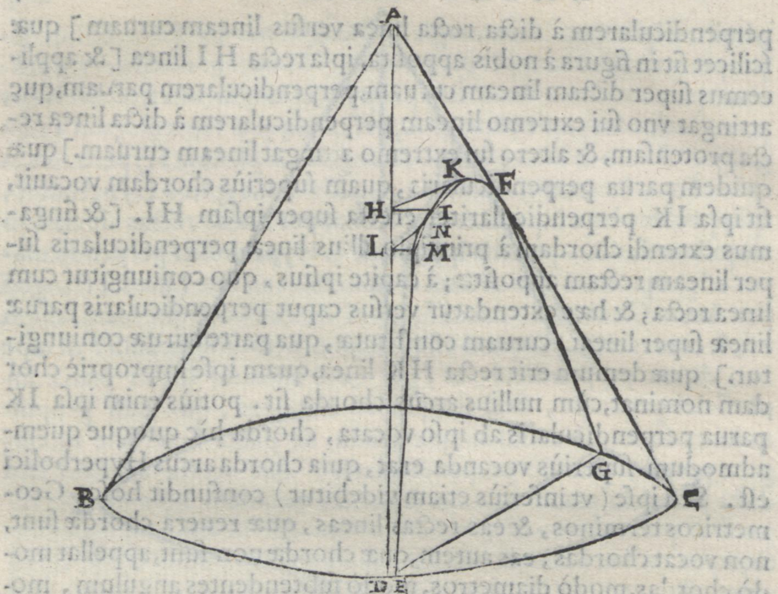
Determinatio.

Constructio.

perpen-

perpendicularem à dicta recta linea versus lineam curuam] quæ scilicet sit in figura à nobis apposita, ipsa recta H I linea [& applicemus super dictam lineam curuam, perpendicularem paruam, quę attingat vno sui extremo lineam perpendicularem à dicta linea recta protensam, & altero sui extremo attingat lineam curuam.] quæ quidem parua perpendicularis, quam superiùs chordam vocauit, sit ipsa I K perpendiculariter erecta super ipsam H I. [& fingamus extendi chordam à principio illius lineæ perpendicularis super lineam rectam appositæ; à capite ipsius, quo coniungitur cum linea recta; & hæc extendatur versus caput perpendicularis paruæ lineæ super lineam curuam constitutæ, qua parte curuæ coniungitur.] quæ demum erit recta H K linea, quam ipse impropriè chordam nominat, cùm nullius arcus chorda sit. potiùs enim ipsa I K parua perpendicularis ab ipso vocata, chorda hìc quoque quemadmodum superiùs vocanda erat, quia chorda arcus Hyperbolici est. Sed ipse (vt inferiùs etiam videbitur) confundit hosce Geometricos terminos, & eas rectas lineas, quæ reuera chordæ sunt, non vocat chordas; eas autem, quæ chordæ non sunt, appellat modò chordas, modò diametros, modò subtendentes angulum, modò subtendentes latera, vel laterum. Hisce ita constructis, probat propositũ hoc modo. videlicet ꝙ si fecerimus aliud triãgulum inferius simile ipsi H I K triangulo iam facto, quale est ipsum L M N; sequetur ipsam H K esse maiorem ipsa L N. quia subtendit angulum rectum contentum à duobus H I, I K lateribus maioribus quàm duo latera L M, M N continentia angulum rectum subtensum à linea L N. Quòd autem latera H I, I K lateribus L M, M N maiora sint, ex hoc confirmat. quia cùm iam probasset illa probabili, friuolaq; maioris incuruationis ratione rectam H I maiorem esse recta L M; probat similiter eadem met maioris flexus ratione rectam quoque I K maiorem esse recta M N. ex quo probat etiam rectam H K esse maiorem recta L N: ex quarum inæqualitate demum concludit duarum propositarum linearum maiorem appropinquationẽ versus basim Coni, quàm versus Apicem. Hęc est tota Demonstratio primæ partis Theorematis ipsius Rabbi Samtou, explicata ab ipso multis obscuris, improprijs, confusis, perplexisque verbis, ac superuacaneis repetitionibus (vt quilibet lector in ipsa eius litera cognoscere poterit) ab illis verbis [Sequetur ergo absque dubio chordam, &c.] vsque ad illa verba [quia curuitas

Demõstratio primæ partis.



Secūdus Error ipsius Rabbi Samtou.

uitas inter ipsas intercedens minuetur:] Quæ quidem Demonstratio grauissimè peccat primùm in hoc, quòd cùm probasset iam illa sua probabili ratione perpendiculares rectas lineas H I, L M, quę sunt minimæ duarum propositarum linearum distantię, esse inęquales; non concludit ex earum inæqualitate propositum, sed frustra probat etiam linearum H K, L N non minimarum distantiarum inæqualitatem, ex qua malè concludit propositū, sicuti etiam omnes Autores fecerunt præter Cardanum. Secundò peccat hęc Demonstratio, quia non demonstrat nisi illa friuola, & probabili ratione incuruationis maioris inæqualitatem linearum I K, M N, ex qua concludit inæqualitatem ipsarum H K, L N: ita vt tota hæc Demonstratio in ipsa nullius momenti ratione consistat. & quod peius est peccat etiam magnoperè in hoc, quòd non docet quo artificio ipse duæ I K, M N chordæ paruæ inæquales in ipsa Hyperbolis curua linea reperiendæ sint, vt Geometricè, & non probabiliter earum inæqualitas demonstrari possit. Verùm cùm ita primam sui Theorematis partem ipse Rabbi demōstrasset, concludit etiam secundam ex suppositione, quòd scilicet non coincidant sibi inuicem

Tertius Error eiusdem.

Quartus Error eiusdem.

Demonstratio secundæ partis.

cem ipsæ duæ propositę lineæ. quoniam (inquit) inter ipsas permanens superficies palmi distantia è regione (hoc est æquidistanter) intercedit, sicuti supposuimus. quod ita intelligendum est vti superiùs diximus, perinde ac si dixisset. quoniã inter ipsa parallella Hyperbolis, & Trianguli per Axem plana permanet semper eadem palmi distantia, sicuti supposuimus. alioquin falsum hìc quoque quemadmodum superiùs diceret. Postea volens ex hoc inferre absurdum, siue inconueniens, quod sequeretur si coinciderent; ꝙ scilicet duo iam supposita parallela plana Hyperbolis, & Trianguli per Axem inuicem coinciderent, quòd suppositioni oppugnat: infert ipse quoddam aliud absurdum à iam dicto diuersum, his verbis [Quòd si coincidant, falsum sequetur, esse superficiem illius lineæ paruę curuæ æqualem superficiei lineæ maioris rectæ.] quorum sanè verborum (meo quidem iudicio) nullus est sensus, qui proposito applicari possit. & ego ingenuè fateor me nequaquam intelligere quænam sit superficies illius lineæ paruæ curuæ, neque illa superficies lineæ rectæ maioris, cui æqualis concludatur illa minoris lineæ paruæ curuæ superficies. prorsusq́; demum (vt hoc imperfectionum huiusce Demonstrationis sigillum sit) nescio quid sibi vir iste iam dictis verbis voluerit. ipse viderit an Deus eum ab erroribus vendicarit, quemadmodum in fine huiusce suæ Demonstrationis illum deprecatus est. Hęc autem de hac etiam Demonstratione, eiusq́; imperfectionibus à nobis satis superque dicta sint.

Quintus Error ipsius Rabbi Samtou.

Commentarij Francisci Barocij Finis.

INDEX LOCVPLETISSIMVS EORVM, QVAE TOTO OPERE CONTINENTVR.

A

B

C

Cardani

D

Definitio-

E

F

G

H

I

L

M

O

P

Propositum,

Q

R

S

T

V

FINIS.